Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **26.11.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Setze $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot | X_0 = x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und die Stopzeit

$$\tau_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : X_t = a \text{ oder } X_t = b\}.$$

Zeigen Sie:

1. Es gibt $\epsilon, \delta > 0$ mit $\mathbb{P}_x(\tau_{a,b} \leq \epsilon) > \delta$ für alle $x \in (a, b)$.
2. Es gibt $r < 1$ und $A > 0$ mit $\mathbb{P}_x(\tau_{a,b} > t) \leq Ar^t$ für alle $x \in (a, b)$, $t \geq 0$.
3. $E_x\tau_{a,b} < \infty$ für alle $x \in (a, b)$.

Aufgabe 2: Starkes Gesetz der großen Zahlen für die Brownsche Bewegung 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, die aus dem Ursprung startet. Zeigen Sie, dass

$$\frac{X_t}{t} \to 0$$

für $t \to \infty$ strebt und folgern Sie daraus, dass durch

$$Y_t = \begin{cases} tX_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

eine Brownsche Bewegung entsteht, die aus dem Ursprung startet.

Aufgabe 3: Ornstein-Uhlenbeck Prozeß als zeittransformierte Brownsche Bewegung 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ definierte Brownsche Bewegung mit einer Startverteilung μ und Diffusionskonstante $\sigma^2 = 1$. Definiere für $\theta > 0$ die Funktion $v(t) = 1 - \exp(-2\theta t)$ und setze

$$Y_t = e^{-\theta t} X(e^{2\theta t} v(t))$$

für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass Y einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß definiert.

Hinweis: Zeigen Sie die Markov-Eigenschaft von Y und vergewissern Sie sich, dass die Familie der Übergangskerne mit der eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses übereinstimmt.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ definierte Brownsche Bewegung startend aus dem Ursprung. Zeigen Sie, dass

$$M_t = X_t^2 - t, t \geq 0$$

ein Martingal definiert, i.e.

$$\mathbb{E}(M_{t+s}|\mathfrak{F}_t) = M_t$$

gilt für alle $s, t \geq 0$.

Abgabe: Die. 04.12.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)