Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **19.11.2012**

Aufgabe 1: Brownsche Bewegung als Levy-Prozeß 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozeß. Zeigen Sie, dass X eine Brownsche Bewegung mit Diffusionkonstante σ^2 und Anfangsverteilung μ definiert genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\mathbb{P}^{X_0} = \mu$,
2. Für beliebige endlich viele Zeitpunkte $t_1 < \cdots < t_n$ sind
$$X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \cdots, X_{t_1} - X_0$$
stochastisch unabhängige Zufallsvariablen,
3. Für jedes $t \geq 0$ und $s > 0$ gilt, dass $X_{t+s} - X_t$ $N(0, \sigma^2 s)$ verteilt ist.

Ein stochastischer Prozeß mit diesen Eigenschaften heißt Prozeß mit unabhängigen und stationären Zuwächsen. Gilt zusätzlich noch, daß der Prozeß sogenannte cadlag Pfade hat, so spricht man von einem Levy-Prozeß.

Aufgabe 2: Brownsche Bewegung als selbstähnlicher Prozeß 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, die aus dem Ursprung startet. Zeigen Sie, dass dann auch für $c > 0$ der durch $Y_t = \frac{1}{\sqrt{c}} X_{ct}$ für alle $t \geq 0$ definierte Prozeß eine Brownsche Bewegung definiert, die aus dem Ursprung startet. Wie kann man diese Eigenschaft interpretieren?

Aufgabe 3: Erzeuger der Brownschen Halbgruppe 4 Punkte

Sei $(T_t)_{t\geq 0}$ die Halbgruppe der Brownschen Bewegung mit Diffusionskonstante $\sigma^2 = 1.$ und f eine beschränkte Borel-meßbare Funktion. Zeigen Sie, dass für die durch $v(x,t) = T_t f(x)$ für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ definierte Funktion v gilt

$$\partial_t v(x,t) = \frac{1}{2} \partial_x^2 v(x,t)$$

für alle $x \in \mathbb{R}, t > 0$. Ist f stetig, so gilt

$$\lim_{t\to 0} v(x,t) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Nirgends Monotonie der Brownschen Bewegung 4 Punkte

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit stetigen Pfaden, die aus dem Ursprung startet. Zeigen Sie:

1. $P(\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega)$ ist monoton auf $[0,1]\}) = 0$.
2. $P(\{\omega \in \Omega : t \to X_t(\omega)$ ist monoton auf $[r,s]\}) = 0$ f.a. $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$.
3. $P(\{\omega \in \Omega :$ Es gibt ein Intervall I mit $t \to X_t(\omega)$ ist monoton auf I$\}) = 0$.

Hinweis: Führen Sie (ii) auf (i) zurück. Betrachten Sie Ereignisse der Form

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \geq X_{\frac{n-1}{n}}(\omega) \geq \cdots \geq X_{\frac{1}{n}}(\omega) \geq 0\}\,.$$

Abgabe: Die. 27.11.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)