Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **12.11.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Chapman-Kolmogorov Eigenschaft für Kerne äquivalent ist zur Halbgruppeneigenschaft der dazugehörigen Familie von Übergangsoperatoren. Genauer formuliert betrachten wir eine Familie $(K_t)_{t\geq 0}$ von stochastischen Kernen mit $K_0(x,\cdot)=\delta_x$. Diese Familie erfüllt die Chapman-Kolmogorov Gleichung, falls

$$K_{t+s}(x,A)=\int K_s(y,A)K_t(x,dy)=\int K_t(y,A)K_s(x,dy)$$

gilt für alle $x\in\mathbb{R}, A\in\mathfrak{B}$. Zeigen Sie:

1. Erfüllt $(K_t)_{t\geq 0}$ die Chapman-Kolmogorov Gleichung, so wird durch

   $$T_t f(x)=\int f(y)K_t(x,dy)$$

   für alle $x\in\mathbb{R}$ eine konservative Halbgruppe positiver Kontraktionen definiert.

2. Ist $(T_t)_{t\geq 0}$ eine konservative Halbgruppe positiver Kontraktionen, so wird durch $K_t(x,A)=T_t 1_A(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $A\in\mathfrak{B}$ eine Familie von stochastischen Kernen definiert, die die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt.

Aufgabe 2: Brownsche Bewegung mit konstanter Drift und konstanter Volatilität 4 Punkte

Definiere die folgende Familie von stochastischen Kernen $(K_t)_{t\geq 0}$ durch $K_0(x,\cdot)=\delta_x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und

$$K_t(x,A)=N(x+bt,\sigma^2 t)(A)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$, $A\in\mathfrak{B}$. Hierbei sind $b\in\mathbb{R}$ und $\sigma^2>0$ vorgegebene Konstanten. Zeigen Sie, dass diese Familie von stochastischen Kernen die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt. Bestimmen Sie die Übergangsdichten, also die Funktion $p(t;x,y)$ mit $K_t(x,A)=\int_A p(t;x,y)dy$. Welche partielle Differentialgleichung erfüllt $(t,y)\to p(t;(x,y))$?

Aufgabe 3: Orenstein-Uhlenbeck Prozeß 4 Punkte

Definiere eine Familie $(K_t)_{t\geq 0}$ von stochastischen Kernen durch $K_0(x,\cdot)=\delta_x$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und

$$K_t(x,A)=N(xe^{-\theta t},\frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta t}))(A)$$

für alle $t>0$,$x\in\mathbb{R}$. Dabei sind $\theta,\sigma>0$ vorweg gegebene Konstanten.

Zeigen Sie, dass diese Familie die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt. Bestimmen Sie die Übergangsdichten $p(t; x, y)$ und die partielle Differentialgleichung, die $(t, y) \to p(t; x, y)$ erfüllt.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Geben Sie zwei unterscheidbare stochastische Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ an, die Modifikationen sind.

Abgabe: Die. 20.11.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)