Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 05** **05.11.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $T \subset [0,\infty)$. Ein System $\mathfrak{A}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^T$ erfülle folgende Eigenschaften:

1. $\mathfrak{A}$ ist eine σ-Algebra,
2. Für jedes $t \in T$ ist die Projektion π_t eine $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ meßbare Abbildung.
3. Ist $\mathfrak{G}$ eine weitere σ-Algebra auf $\mathbb{R}^T$, so dass jede Projektionen π_t eine $\mathfrak{G} - \mathfrak{B}$ meßbare Abbildung ist, so gilt $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$.

Dies bedeutet, dass $\mathfrak{A}$, die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der alle Projektionen meßbar sind.

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}^T$ übereinstimmt.

Aufgabe 2: Beschreibung von $\mathfrak{B}^{[0,\infty)}$ 4 Punkte

Eine Teilmenge C von $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ heißt abzählbare Zylindermenge genau dann, wenn es abzählbare Zeitpunkte $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ gibt und ein Ereignis $A \in \mathfrak{B}^{\mathbb{N}}$, so dass

$$C = \{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : (\omega(t_i))_{i\in\mathbb{N}} \in A\}.$$

Bezeichne mit $\mathfrak{Z}$ die Menge aller abzählbaren Zylindermengen.

Zeigen Sie: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}^{[0,\infty)}$

Nutzen Sie dies für den Nachweis, dass für jede Funktion $f \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}$ die Menge $\{f\}$ nicht meßbar, also nicht in $\mathfrak{B}^{[0,\infty)}$ enthalten ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass es einen stochastischen Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ gibt mit

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \cdots, X_{t_n} = x_n) = \exp(-\lambda t_n)\frac{(\lambda t_1)^{x_1}(\lambda(t_2-t_1))^{x_2-x_1}\cdots(\lambda(t_n-t_{n-1}))^{x_n-x_{n-1}}}{x_1!(x_2-x_1)!\cdots(x_n-x_{n-1})!}$$

für alle endlich vielen Zeitpunkte $0 < t_1 < \cdots < t_n$ und alle $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{N}_0$ mit $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

Aufgabe 4: Satz von Andersen und Jessen 4 Punkte

Sei $(\mu_t)_{t\geq 0}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Zeigen Sie, dass es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}), \mathfrak{B}^{[0,\infty)})$ gibt mit

$$\mu(\{\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}\ \omega(t_1) \in A_1, \cdots, \omega(t_n) \in A_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mu_{t_i}(A_i)$$

für alle endlich vielen Zeitpunkte $t_1, \cdots, t_n \in [0, \infty)$ und Ereignisse $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{B}$.
μ ist das Produktmaß der $(\mu_t)_{t \geq 0}$.

Abgabe: Die. 13.11.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)