Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **29.10.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Führen Sie den Beweis des Satzes 1.22 aus der Vorlesung zu Ende. Für eine gleichgradig integrierbare Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X konvergiert, ist zu zeigen, dass diese Konvergenz auch in L_1 vorliegt. Zu zeigen ist also

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| = 0.$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Geben Sie ein nicht reguläres Martingal an, dass fast sicher gegen eine endliche Zufallsvariable konvergiert.

Aufgabe 3: Verallgemeinerung des Satzes von der majorisierten Konvergenz 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in L_1, die in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable X_∞ konvergiert. Es gebe ein $Y \in L_1$, dass alle X_n betragsmäßig dominiert, i.e. $|X_n| \leq |Y|$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_\infty$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten einen Galton Watson Verzweigungsprozeß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $S_0 = 1$. Die Reproduktionsverteilung habe ein Reproduktionsmittel $\mu > 1$ und eine endliche Varianz σ^2. Zeigen Sie, dass $W_n = \frac{S_n}{\mu^n}$ gegen eine Zufallsvariable W_∞ strebt, die $\mathbb{E}W_\infty = 1$ erfüllt.

Hinweis: Unter http://www.cornelsen.de/physikextra/htdocs/Teilchen1.html findet man ein Java-Applet zur Brownschen Bewegung

Abgabe: Die. 07.11.2011 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)