Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **22.10.2012**

Aufgabe 1: Null-Eins Gesetz von Kolmogorov 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsgrößen. Sei $\mathfrak{F}_n = \sigma\{X_1, \cdots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, die dazugehörige kanonische Filtration. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne mit

$$\mathfrak{T}_n = \sigma\{X_n, X_{n+1}, \cdots\}$$

die σ- Algebra der nach n beobachtbaren Ereignisse und mit $\mathfrak{T} = \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{T}_n$ die terminale σ-Algebra der Ereignisse, die nur im unendlichen beobachtbar sind.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ gilt für jedes $A \in \mathfrak{T}$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und τ eine Stopzeit mit $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1, \mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|1_{\{\tau>n\}} = 0$. Zeigen Sie, dass dann das gestoppte Martingal X^τ definiert durch $X_n^\tau = X_{\tau\wedge n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine integrierbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Familie

$$\{\mathbb{E}(X|\mathfrak{G}) : \mathfrak{G} \text{ Unter } \sigma\text{-Algebra von } \mathfrak{F}\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 4: Doob Meyer Zerlegung 4 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein zu einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozeß mit $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass es $\mathbb{P}$- fast sicher genau eine Zerlegung der Form

$$X_n = Y + M_n + \Lambda_n \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gibt mit

1. Y ist $\mathfrak{F}_0$-meßbar
2. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal mit $M_0 = 0$
3. $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vorhersehbar und $\lambda_0 = 0$.

Abgabe: Die. 30.10.2011 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres), Fach 55 (Blank)