Übungen zur Vorlesung Stochastische Analysis

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 01** **08.10.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_i = 2^i - 1) = \frac{1}{2^i} = 1 - \mathbb{P}(Y_i = -1)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Definiere den Prozeß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$S_0 = 0, S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie

1. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert ein Martingal,
2. S_n konvergiert gegen $-\infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 2: Galton Watson Prozeß 4 Punkte

Ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung der Entwicklung einer Populationsgröße entlang von Generationen liefert der Galton Watson Prozeß. Startend mit einem Urahnen sei $(Y_{n,k})_{n\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen jeweils mit Werten in $\mathbb{N}_0$, die die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums in der n-ten Generation modelliert. Die Populationsgröße S_n der n-ten Generation ist dann definiert durch

$$S_0 = 1, S_n = \sum_{k=1}^{S_{n-1}} Y_{n-1,k}.$$

Wir nehmen an, dass die sogenannte Reproduktionsverteilung, also die Verteilung eines jeden $Y_{n,k}$ einen endlichen Erwartungswert μ besitzt. Zeigen Sie, dass durch

$$W_n = \frac{S_n}{\mu^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein Martingal definiert wird.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien X ein Martingal und τ eine Stopzeit bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass der gestoppte Prozeß X^τ ,definiert durch

$$X_n^\tau = X_{\tau\wedge n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal ist bezüglich $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie, dass die Martingaleigenschaft auch gilt bezüglich der Filtration $(\mathfrak{F}_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien $\mathbb{P}_{\theta_0}, \mathbb{P}_{\theta_1}$ Wahrscheinlichkeitsmaße, so daß $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Random-Walk auf $\mathbb{Z}$ startend aus 0 bezeichnet mit $\mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = 1) = \theta_i = 1 - \mathbb{P}_{\theta_i}(S_1 = -1)$, $i = 1, 2$. Sei $\mathfrak{F}_n = \sigma(\{S_1, S_2, \cdots, S_n\})$ für $n \in \mathbb{N}$ die durch S erzeugte Filtration und L_n die Radon Nikodym Dichte von $\mathbb{P}_{\theta_1}$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ auf $\mathfrak{F}_n$. Also gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(A) = \int_A L_n d\mathbb{P}_{\theta_0}$$

für alle $A \in \mathfrak{F}_n$. Zeigen Sie

(i) Für die Stopzeit

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : L_n \geq b\}$$

gilt

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\tau < n) \leq \frac{1}{b}\mathbb{P}_{\theta_1}(\tau < n) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii)

$$L_n = (\frac{\theta_1}{\theta_0})^{N(n)}(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0})^{n-N(n)}$$

mit $N(n) = \frac{S_n+n}{2}$. $N(n)$ zählt die Anzahl der Aufwärts- und $n - N(n)$ die Anzahl der Abwärtssprünge in den ersten n Schritten.

(iii) Wie verhält sich L_n für $n \to \infty$ bezüglich $\mathbb{P}_{\theta_0}$ und $\mathbb{P}_{\theta_1}$.

(iv)

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(\tau < \infty) = 1 \quad , \quad \mathbb{P}_{\theta_0}(\tau < \infty) \leq \frac{1}{b}$$

Abgabe: Die. 16.10.2011 bis spätestens 11.00 im Fach 54 (Torres) / Fach 55 (Blank)