Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Seminarvortrag

Nichtparametrische Verfahren

Teil I: Invarianz, Ordnungs- und Rangstatistiken

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ziel der statistischen Entscheidungstheorie ist es, aus zufälligen Beobachtungen Aussagen über die wahre, aber unbekannte Verteilung der beobachteten zufälligen Größe abzuleiten. In der parametrischen Statistik wird dabei vorausgesetzt, dass die der Grundgesamtheit zugrunde liegende Verteilung bis auf endlich viele unbekannte Parameter bereits vollständig spezifiziert ist. Häufig treten jedoch Situationen auf, in denen keine Annahmen über den vorliegenden Verteilungstyp möglich sind bzw. in denen sich die vorliegende Verteilungsklasse nicht durch einen endlich-dimensionalen Parameter beschreiben lässt. In solchen Fällen kommen nichtparametrische Modelle zur Anwendung. Diese legen die Modellstruktur nicht a priori fest, sondern bestimmen sie aus den Daten. Der Begriff "nichtparametrisch" bedeutet dabei nicht, dass solche Modelle überhaupt keine Parameter besitzen. Vielmehr ist die Art und Anzahl der Parameter flexibel und nicht von vornherein festgelegt. Typische Verteilungsfamilien sind hier z.B. von der Form

$$\mathfrak{W} = \left\{ W_{(Q_1,Q_2)} : (Q_1, Q_2) \in \Theta \right\}, \quad W_{(Q_1,Q_2)} = Q_1^n \otimes Q_2^n$$

mit

$$\Theta = \left\{ (Q_1, Q_2) : Q_1, Q_2 \text{ stetige W-Maße auf } (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \right\}.$$

Nichtparametrische Testverfahren untersuchen dann beispielsweise, ob die Werte in der Grundgesamtheit einer bestimmten Verteilung (z.B. einer Normalverteilung) folgen.
Im Folgenden soll zunächst ein statistisches Problem vorgestellt werden, das uns durch den gesamten Themenblock hindurch begleiten wird. Dieses werden wir als nichtparametrisches Testproblem formulieren. Ziel dieses Vortrags ist die Vorbereitung auf die Herleitung eines in noch zu spezifizierendem Sinne besten Tests für dieses Problem. Zwei Teststatistiken spielen dabei eine zentrale Rolle - die Ordnungs- und Rangstatistiken. Nachdem wir diese eingeführt haben, untersuchen wir die Möglichkeiten der Datenreduktion mithilfe dieser Statistiken. Hierbei stehen die Konzepte der Reduktion durch Invarianz bzw. durch Suffizienz im Vordergrund. Abschließend wird ein Ausblick auf das weitere Vorgehen bei der Handhabung unseres Testproblems gegeben.

2 Vorstellung der statistischen Problemstellung

Wir wollen zunächst eine Einführung in die statistische Problemstellung geben, die wir im Folgenden untersuchen werden.
Zum Vergleich der Güte zweier Behandlungsmethoden I und II werden n_1 Messungen unter Verwendung von Verfahren I und n_2 Messungen unter Verwendung von Verfahren II durchgeführt. Auf Basis der Ergebnisse, repräsentiert durch die Zufallsgrößen $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ und $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ für Verfahren I bzw. II, soll entschieden werden, ob Verfahren I besser als Verfahren II ist, wobei sich größere Güte durch höhere Messwerte auszeichnet. Dabei nehmen wir an, dass alle X_{ij} stochastisch unabhängig sind mit $X_{ij} \sim F_i$ für $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$. Um Notation zu sparen, bezeichne im Folgenden F_i sowohl die Verteilung der X_{ij}, d.h. das W-Maß $\mathbb{P}^{X_{ij}}$, als auch die zugehörige Verteilungsfunktion. Setzen wir also $n = n_1 + n_2$, so erhalten wir $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ als Stichprobenraum.
Um nun dieses Problem als nichtparametrisches Testproblem formulieren zu können, benötigen wir vorab noch eine Definition aus dem Bereich der stochastischen Majorisierung, der die Einführung einer Halbordnung auf Mengen von W-Maßen ermöglicht.

2.1 Einschub: stochastische Majorisierung von W-Maßen

Definition 2.1. *Seien Q_1, Q_2 zwei W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Dann heißt Q_2 stochastisch größer als Q_1 (alternativ: Q_2 majorisiert Q_1, in Zeichen $Q_2 \succeq Q_1$), falls gilt*

$$Q_2\left((x, \infty)\right) \geq Q_1\left((x, \infty)\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Gilt außerdem $Q_2 \neq Q_1$, so schreiben wir $Q_2 \succ Q_1$.

Q_2 ist also stochastisch größer als Q_1, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit für Realisationen größer als x unter Q_2 mindestens so groß ist wie unter Q_1. Dies ist offenbar äquivalent dazu, dass für die zugehörigen Verteilungsfunktionen gilt:

$$F_{Q_2}(x) \leq F_{Q_1}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Definieren wir für eine Verteilungsfunktion F deren Pseudo-Inverse bzw. Quantilfunktion durch

$$F^{-1}(y) := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\right\}, \quad y \in (0, 1),$$

so impliziert $Q_2 \succeq Q_1$ also

$$F_{Q_1}^{-1}(y) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F_{Q_1}(x) \geq y\right\} \leq \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F_{Q_2}(x) \geq y\right\} = F_{Q_2}^{-1}(y) \quad \forall y \in (0, 1),$$

also $F_{Q_1}^{-1} \leq F_{Q_2}^{-1}$ und damit insbesondere $F_{Q_1}^{-1}(U) \leq F_{Q_2}^{-1}(U)$ für jede $R(0,1)$-verteilte Zufallsgröße U. Nach einem Lemma aus WT1 (vgl. Alsmeyer WT, Lemma 36.8) gilt außerdem für jede solche $R(0,1)$-verteilte Zufallsgröße U

$$F_{Q_1}^{-1}(U) \sim Q_1, F_{Q_2}^{-1}(U) \sim Q_2.$$

Zu Q_1, Q_2 mit $Q_2 \succeq Q_1$ existieren somit stets Zufallsgrößen $X \sim Q_1$ und $Y \sim Q_2$, sodass $X \leq Y$.

Lemma 2.2. *Seien Q_1, Q_2 W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Es gilt $Q_2 \succeq Q_1$ genau dann, wenn*

$$\int g(x)\, Q_1(dx) \leq \int g(x)\, Q_2(dx)$$

für jede monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Seien Q_1, Q_2 W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
" $\Rightarrow$ " : Gelte $Q_2 \succeq Q_1$ und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige monoton wachsende Funktion. Wähle nun Zufallsgrößen X, Y auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X \sim Q_1$ und $Y \sim Q_2$ mit $X \leq Y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int g(x)\, Q_1(dx) &= \int g(x)\, \mathbb{P}^X(dx) \\
&= \int g(X)\, d\mathbb{P} \\
&\leq \int g(Y)\, d\mathbb{P} \\
&= \int g(x)\, \mathbb{P}^Y(dx) \\
&= \int g(x)\, Q_2(dx).
\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " :Gelte $\int g(x)\, Q_1(dx) \leq \int g(x)\, Q_2(dx)$ für jede monoton wachsende Funktion

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F_{Q_1}(x) &= Q_1((-\infty, x]) \\
&= \int \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(z)\, Q_1(dz) \\
&= 1 - \int \mathbf{1}_{(x,\infty)}(z)\, Q_1(dz) \\
&\geq 1 - \int \mathbf{1}_{(x,\infty)}(z)\, Q_2(dz) \\
&= \int \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(z)\, Q_2(dz) \\
&= Q_2((-\infty, x]) \\
&= F_{Q_2}(x)
\end{aligned}$$

Somit folgt: $Q_2 \succeq Q_1$. □

Mithilfe dieser Begrifflichkeiten werden wir nun unsere statistische Problemstellung präzisieren:
Wir definieren

$$\Theta := \{(G_1, G_2) : G_1, G_2 \text{ sind stetige W-Maße auf } (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \text{ mit } G_1 \succeq G_2 \text{ oder } G_1 \preceq G_2\}$$

und setzen für unser Testproblem voraus, dass die uns unbekannten Verteilungen F_1 der X_{1j} bzw. F_2 der X_{2j} im Sinne der stochastischen Ordnung vergleichbar sind, d.h. dass gilt: $(F_1, F_2) \in \Theta$.
Sei nun $X = (X_{11}, \ldots, X_{2n_2})$. Dann erhalten wir das folgende statistische Experiment

$$\mathcal{E} = \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, (F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2})_{(F_1,F_2)\in\Theta}\right).$$

Hierfür lässt sich das oben beschriebene Testproblem formulieren als

$$H = \{(F_1, F_2) \in \Theta : F_1 \preceq F_2\} \text{ gegen } K = \{(F_1, F_2) \in \Theta : F_1 \succ F_2\}.$$

Ist nämlich $(F_1, F_2) \in H$, so folgt aus $F_1 \preceq F_2$ gemäß Lemma 2.2 für alle $j \in \{1, \ldots, n_1\}, k \in \{1, \ldots, n_2\}$:

$$\mathbb{E}(X_{1j}) = \int x F_1(dx) \leq \int x F_2(dx) = \mathbb{E}(X_{2k}).$$

Im Mittel sind die Messwerte bei Verwendung von Verfahren II also mindestens so hoch wie bei Verwendung von Verfahren I, d.h. die Hypothese H entspricht der Aussage

"Verfahren II ist mindestens so gut wie Verfahren I".
Das nötige "Werkzeug", das dieses Testproblem handhabbar macht, bilden Ordnungs- und Rangstatistiken, die wir als nächstes einführen wollen.

3 Ordnungs- und Rangstatistiken

Sei $n \geq 2$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Vektor des $\mathbb{R}^n$. Ordnen wir die Komponenten von x in aufsteigender Größe, so erhalten wir einen Vektor $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ mit $x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \ldots \leq x_{i_n}$, den wir hiernach mit $\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ bezeichnen.

Definition 3.1. *Die Abbildung*

$$T_{(\cdot)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$$

heißt Ordnungsstatistik (OS) und ist $\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^n-$messbar mit

$$T_{(\cdot)}\left(\mathbb{R}^n\right) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \ldots \leq x_n\} \in \mathcal{B}^n.$$

Für unser Testproblem betrachten wir eine etwas abgewandelte Form dieser Ordnungsstatistik, nämlich $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T = \left(T_{1,(\cdot)}, T_{2,(\cdot)}\right)$, wobei $T_{1,(\cdot)}$ und $T_{2,(\cdot)}$ die Ordnungsstatistiken der ersten bzw. zweiten Teilstichprobe bezeichnen, d.h.

$$T_{i,(\cdot)}\left(x\right) := \left(x_{i,(1)}, \ldots, x_{i,(n_i)}\right)$$

für $i \in \{1, 2\}$ und $x = (x_{11}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^n$.

Einher mit der aufsteigenden Anordnung der Komponenten eines Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ geht die Angabe der Stelle, an der jedes x_j im geordneten Tupel $\left(x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}\right)$ steht. Falls $x_j = x_{(r_j)}$ gilt, so bezeichnet man r_j als Rangzahl von x_j in $(x_1, \ldots, x_n)$.

Definition 3.2. *Führen wir für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die messbare Abbildung*

$$R_j : \mathbb{R}^n \to \{1, \ldots, n\}, x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[0,\infty)}\left(x_j - x_i\right) = \left|\{i : x_i \leq x_j\}\right|$$

ein und definieren

$$R : \mathbb{R}^n \to \{1, \ldots, n\}^n, x \mapsto \left(R_1\left(x\right), \ldots, R_n\left(x\right)\right),$$

so heißt R Rangstatistik (RS) und es gilt $x_j = x_{(R_j(x))}$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Auf unser Problem gemünzt betrachten wir die Rangstatistik $R : \mathbb{R}^n \to \{1, \ldots, n\}^n$ mit $R = (R_{11}, \ldots, R_{2n_2})$ und

$$R_{ij}(x) := \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x_{ij} - x_{kl})$$

für $x = (x_{11} \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 3.3. Für $n_1 = 3$ Messungen bei Verwendung von Verfahren I und $n_2 = 4$ Messungen bei Verwendung von Verfahren II ergibt sich als Gesamtstichprobe $x = (1.9, 2.6, 0.4, 2.1, 2.7, 1.9, 3.2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T_{(\cdot)}(x) &= (0.4, 1.9, 1.9, 2.1, 2.6, 2.7, 3.2) \\ T(x) &= (0.4, 1.9, 2.6, 1.9, 2.1, 2.7, 3.2) \\ R(x) &= (3, 5, 1, 4, 6, 3, 7). \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass der Rang 3 zweimal auftritt. Dies liegt daran, dass x zweimal die Komponente 1.9 enthält. In einem solchen Fall spricht man vom Vorliegen von Bindungen. Man überlegt sich leicht, dass $R(x)$ genau dann eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ ist, wenn keine Bindungen vorliegen, d.h. wenn

$$x \in \mathbb{R}^n_{\neq} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq x_j \textit{ für } i \neq j\}.$$

4 Datenreduktion

Vorbereitend auf die Herleitung eines in noch zu präzisierendem Sinne besten Tests für das oben formulierte Testproblem, wollen wir nun Überlegungen zu möglichen Datenreduktionen durch die vorgestellten Ordnungs- und Rangstatistiken anstellen. Ein uns bekanntes Konzept für eine Datenreduktion, bei der keine wesentlichen Informationen verloren gehen, ist das der Suffizienz. Wir wollen zunächst ein anderes Konzept vorstellen.

4.1 Reduktion durch Invarianz

Definition 4.1. *Sei $\mathcal{E} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathfrak{W})$ mit $\mathfrak{W} = (W_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Experiment und $\mathbb{G}$ eine Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen $g : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ versehen mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung. Dann heißt $\mathfrak{W}$ invariant unter $\mathbb{G}$, falls gilt*

$$W_\theta^g \in \mathfrak{W} \;\; \forall \theta \in \Theta, g \in \mathbb{G}.$$

Ein Testproblem heißt invariant unter $\mathbb{G}$, falls die Verteilungsklassen

$$\mathfrak{W}_H := \{W_\theta : \theta \in H\} \text{ und } \mathfrak{W}_K := \{W_\theta : \theta \in K\}$$

jeweils invariant unter $\mathbb{G}$ sind.

Definition 4.2. *Sei $\mathcal{E} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathfrak{W})$ mit $\mathfrak{W} = (W_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Experiment und $\mathbb{G}$ eine Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen. Sei $T : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathfrak{X}', \mathcal{A}')$ eine Statistik.*

- *T heißt invariant unter $\mathbb{G}$, falls $T(g(x)) = T(x)$ für alle $g \in \mathbb{G}$ und $x \in \mathfrak{X}$ gilt.*
- *T heißt maximalinvariant unter $\mathbb{G}$, falls T invariant unter $\mathbb{G}$ ist und zu je zwei Punkten $x, y \in \mathfrak{X}$ mit $T(x) = T(y)$ ein $g \in \mathbb{G}$ existiert, sodass $g(x) = y$.*

Ist eine Statistik T also invariant, so gilt $\{g(x) : g \in \mathbb{G}\} \subseteq T^{-1}(T(x))$ für alle $x \in \mathfrak{X}$. Ist T maximalinvariant, so gilt auch $T^{-1}(T(x)) \subseteq \{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$, also $T^{-1}(T(x)) = \{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$. Somit besitzen die maximalinvarianten Statistiken unter den invarianten die größte Feinstruktur insofern, als ihre Konstanzbereiche $T^{-1}(T(x))$, $x \in \mathfrak{X}$, genau den Mengen $\{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$, genannt Trajektorie des Punktes x unter $\mathbb{G}$, entsprechen.

Wir betrachten nun die folgende Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen:

$$\mathbb{G}_1 := \left\{\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} : (\pi_1, \pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}\right\},$$

wobei Π_{n_i} die Gruppe der Permutationen der Zahlen $1, \ldots, n_i$ bezeichnet und $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x) := \left(x_{1\pi_1(1)}, \ldots, x_{1\pi_1(n_1)}, x_{2\pi_2(1)}, \ldots, x_{2\pi_2(n_2)}\right)$ für $x = (x_{11}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^n$ und $(\pi_1, \pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}$. Ein Element $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1$ permutiert also die ersten n_1 Komponenten von x gemäß $\pi_1 \in \Pi_{n_1}$ und die übrigen n_2 Komponenten gemäß $\pi_2 \in \Pi_{n_2}$.

Proposition 4.3. *Das oben formulierte Testproblem ist invariant unter $\mathbb{G}_1$.*

Beweis. Für beliebiges $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right)^{\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}} &= \left(\mathbb{P}^X_{(F_1,F_2)}\right)^{\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}} \\
&= \mathbb{P}^{\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(X)}_{(F_1,F_2)} \\
&= \mathbb{P}^{\left(X_{1\pi_1(1)},\ldots,X_{1\pi_1(n_1)},X_{2\pi_2(1)},\ldots,X_{2\pi_2(n_2)}\right)}_{(F_1,F_2)} \qquad (4.1) \\
&= \mathbb{P}^X_{(F_1,F_2)} \\
&= \left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Invarianz des Testproblems unter $\mathbb{G}_1$. □

Proposition 4.4. *Die Statistik* $T = \left(T_{1,(\cdot)}, T_{2,(\cdot)}\right)$ *ist maximalinvariant unter der Gruppe* $\mathbb{G}_1$*.*

Beweis. Seien zunächst $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
T\left(\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right) &= T\left(x_{1\pi_1(1)}, \ldots, x_{1\pi_1(n_1)}, x_{2\pi_2(1)}, \ldots, x_{2\pi_2(n_2)}\right) \\
&= \left(x_{1(\pi_1(1))}, \ldots, x_{1(\pi_1(n_1))}, x_{2(\pi_2(1))}, \ldots, x_{2(\pi_2(n_2))}\right) \\
&= \left(x_{1,(1)}, \ldots, x_{1,(n_1)}, x_{2,(1)}, \ldots, x_{2,(n_2)}\right) \\
&= T(x).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Invarianz von T unter $\mathbb{G}_1$.
Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = T(y)$. Dann gilt offenbar $\left(x_{1,(1)}, \ldots, x_{1,(n_1)}\right) = \left(y_{1,(1)}, \ldots, y_{1,(n_1)}\right)$ und $\left(x_{2,(1)}, \ldots, x_{2,(n_2)}\right) = \left(y_{2,(1)}, \ldots, y_{2,(n_2)}\right)$. Die jeweiligen Teilstichproben von x bzw. y haben also die gleichen Komponenten. Somit existieren $\pi_1 \in \Pi_{n_1}$ und $\pi_2 \in \Pi_{n_2}$ mit $(y_{11}, \ldots, y_{1n_1}) = \left(x_{1\pi_1(1)}, \ldots, x_{1\pi_1(n_1)}\right)$ und $(y_{21}, \ldots, y_{2n_2}) = \left(x_{2\pi_2(1)}, \ldots, x_{2\pi_2(n_2)}\right)$, also $y = \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)$. Dies zeigt die Maximalinvarianz von T unter $\mathbb{G}_1$. □

Wir wollen eine weitere Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen betrachten. Hierzu definieren wir zunächst für eine beliebige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\hat{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (g(x_1), \ldots, g(x_n)).$$

und setzen ferner

$$\mathbb{G}_2 := \{\hat{g} : g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv}\}.$$

Proposition 4.5. *Das oben formulierte Testproblem ist invariant unter* $\mathbb{G}_2$*.*

Beweis. Für beliebige $(F_1, F_2) \in \Theta$ und $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$ gilt:

$$(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2})^{\hat{g}} = (F_1^g)^{n_1} \otimes (F_2^g)^{n_2}.$$

Denn sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right)^{\hat{g}} \left(A_1 \times \ldots \times A_n\right) &= \left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right) \left(\hat{g}^{-1} \left(A_1 \times \ldots \times A_n\right)\right) \\
&= \left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right) \left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : g\left(x_i\right) \in A_i \forall 1 \leq i \leq n\right\}\right) \\
&= \left(F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2}\right) \left(g^{-1}\left(A_1\right) \times \ldots \times g^{-1}\left(A_n\right)\right) \\
&= F_1 \left(g^{-1}\left(A_1\right)\right) \cdot \ldots \cdot F_1 \left(g^{-1}\left(A_{n_1}\right)\right) \cdot F_2 \left(g^{-1}\left(A_{n_1+1}\right)\right) \cdot \\
&\quad \ldots \cdot F_2 \left(g^{-1}\left(A_n\right)\right) \\
&= \left(F_1^g\right)^{n_1} \left(A_1 \times \ldots \times A_{n_1}\right) \cdot \left(F_2^g\right)^{n_2} \left(A_{n_1+1} \times \ldots \times A_n\right) \\
&= \left(F_1^g\right)^{n_1} \otimes \left(F_2^g\right)^{n_2} \left(A_1 \times \ldots \times A_n\right).
\end{aligned}$$

Die Gleichheit der W-Maße gilt also auf einem Erzeuger von $\mathcal{B}^n$ und somit auch auf $\mathcal{B}^n$. Ferner sind mit F_1 und F_2 auch F_1^g und F_2^g stetige W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Mit Hilfe von Lemma 2.2 lässt sich außerdem leicht zeigen, dass gilt:

$$F_1 \preceq (\succ) F_2 \Leftrightarrow F_1^g \preceq (\succ) F_2^g.$$

Somit folgt:

$$\left(F_1, F_2\right) \in H(K) \Leftrightarrow \left(F_1^g, F_2^g\right) \in H(K).$$

Es folgt die Invarianz des Testproblems unter $\mathbb{G}_2$. □

Ferner stellen wir nun fest:

Proposition 4.6. *Die Rangstatistik R ist maximalinvariant unter der Gruppe $\mathbb{G}_2$.*

Beweis. Seien zunächst $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt für alle $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \ldots, n_i\}$:

$$\begin{aligned}
R_{ij}\left(\hat{g}(x)\right) &= R_{ij}\left(g\left(x_{11}\right), \ldots, g\left(x_{2n_2}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0,\infty)} \left(g\left(x_{ij}\right) - g\left(x_{kl}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0,\infty)} \left(x_{ij} - x_{kl}\right) \\
&= R_{ij}(x),
\end{aligned}$$

wobei die dritte Gleichheit folgt, da $g\left(x_{ij}\right) \geq g\left(x_{kl}\right) \Leftrightarrow x_{ij} \geq x_{kl}$ für alle $k \in \{1, 2\}, l \in \{1, \ldots, n_k\}$, da g monoton wachsend und bijektiv ist. Somit folgt $R\left(\hat{g}(x)\right) = R(x)$ und damit die Invarianz von R unter $\mathbb{G}_2$.
Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $R(x) = R(y)$. Da die Zufallsgrößen X_{ij} stochastisch unabhängig und allesamt stetig verteilt sind, gilt $\mathbb{P}\left(\exists ij \neq kl : X_{ij} = X_{kl}\right) = 0$, sodass wir

o.B.d.A. $x, y \in \mathbb{R}^n_{\neq}$ annehmen dürfen. Nun gilt also:

$$x = \left(x_{(R_{11}(x))}, \ldots, x_{(R_{2n_2}(x))}\right) = \left(x_{(R_{11}(y))}, \ldots, x_{(R_{2n_2}(y))}\right)$$

Definiere nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie folgt: für $z \leq x_{(11)}$ setze $g(z) := y_{(11)} + \left(z - x_{(11)}\right)$ und für $z \geq x_{(2n_2)}$ setze $g(z) := y_{(2n_2)} + \left(z - x_{(2n_2)}\right)$. Zwischen je zwei größenmäßig benachbarten Beobachtungen $x_{(ij)} \leq x_{(kl)}$ setze g linear und stetig fort mit $g\left(x_{(ij)}\right) = y_{(ij)}$. Dann ist g offenbar stetig. Da außerdem $x, y \in \mathbb{R}^n_{\neq}$ und somit $y_{(11)} < \ldots < y_{(2n_2)}$ gilt, ist g auch bijektiv und streng monoton wachsend. Damit ist $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$. Ferner gilt für alle $i \in \{1, 2\}, j \in \{1, \ldots, n_i\}$:

$$y_{ij} = y_{(R_{ij}(y))} = g\left(x_{(R_{ij}(y))}\right) = g\left(x_{(R_{ij}(x))}\right) = g\left(x_{ij}\right)$$

und somit $y = (y_{11}, \ldots, y_{2n_2}) = (g(x_{11}), \ldots, g(x_{2n_2})) = \hat{g}(x)$. Hieraus folgt die Maximalinvarianz von R unter $\mathbb{G}_2$. $\square$

Wir haben nun festgestellt, dass das gegebene Testproblem invariant ist sowohl unter der Gruppe $\mathbb{G}_1$ als auch unter der Gruppe $\mathbb{G}_2$. Man rechnet nun leicht nach, dass das Testproblem dann auch invariant ist unter der Gruppe $\mathbb{G} = \langle \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2 \rangle$, die von $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ erzeugt wird, d.h. der kleinsten Gruppe, die $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ enthält, denn diese Gruppe besteht gerade aus allen möglichen Kompositionen von Elementen aus $\mathbb{G}_1$ bzw. $\mathbb{G}_2$. Außerdem gilt für alle $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1, \hat{g} \in \mathbb{G}_2$: $\hat{g} \circ \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} = \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \circ \hat{g}$. Denn offenbar gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\hat{g}\left(\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right) &= \hat{g}\left(x_{1\pi_1(1)}, \ldots, x_{1\pi_1(n_1)}, x_{2\pi_2(1)}, \ldots, x_{2\pi_2(n_2)}\right) \\
&= \left(g\left(x_{1\pi_1(1)}\right), \ldots, g\left(x_{1\pi_1(n_1)}\right), g\left(x_{2\pi_2(1)}\right), \ldots, g\left(x_{2\pi_2(n_2)}\right)\right) \\
&= \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}\left(g(x_{11}), \ldots, g(x_{1n_1}), g(x_{21}), \ldots, g(x_{2n_2})\right) \\
&= \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}\left(\hat{g}(x)\right).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die von $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$ erzeugte Gruppe:

$$\mathbb{G} = \left\{\hat{g} \circ \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} : g \text{ stetig, streng monoton wachsend und bijektiv}, (\pi_1, \pi_2) \in \Pi_{n_1} \otimes \Pi_{n_2}\right\}$$

Ferner überzeugt man sich leicht davon, dass die maximalinvarianten Statistiken T und R unter $\mathbb{G}_1$ bzw. $\mathbb{G}_2$ miteinander kommutieren. Betrachten wir nun ihre Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n &\to \Pi_{n,<}^{n_1,n_2} := \left\{ \pi \in \Pi_n : \pi(1) < \ldots < \pi(n_1), \pi(n_1+1) < \ldots < \pi(n) \right\}, \\ x &\mapsto R \circ T(x) = T \circ R(x) = \left(R_{1,(\cdot)}(x), R_{2,(\cdot)}(x) \right), \end{aligned}$$

wobei $R_{i,(\cdot)}(x) := \left(R_{i,(1)}(x), \ldots, R_{i,(n_i)}(x) \right)$ für $i \in \{1,2\}$, d.h. $R_{i,(\cdot)}$ ordnet die Rangzahlen der Teilstichprobe i nach aufsteigender Größe.

Proposition 4.7. *Die Statistik L ist maximalinvariant unter der Gruppe $\mathbb{G}$.*

Beweis. Seien zunächst $x \in \mathbb{R}^n, \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1$ und $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L\left(\hat{g} \circ \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right) &= T \circ R\left(\hat{g} \circ \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right) \\ &= T\left(R\left(\hat{g}\left(\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right)\right)\right) \\ &= T\left(R\left(\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right)\right) \\ &= R\left(T\left(\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(x)\right)\right) \\ &= R(T(x)) \\ &= L(x) \end{aligned}$$

Dies zeigt die Invarianz von L unter $\mathbb{G}$.
Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $L(x) = L(y)$, also $R(T(x)) = R(T(y))$. Dann folgt zunächst aufgrund der Maximalinvarianz von R unter $\mathbb{G}_2$ die Existenz eines $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$ mit

$$T(y) = \hat{g}(T(x)) = T(\hat{g}(x)). \tag{4.2}$$

Hierbei folgt die zweite Gleichheit, da für alle $\hat{g} \in \mathbb{G}_2$ und $x \in \mathbb{R}^n$ $\hat{g}(T(x)) = T(\hat{g}(x))$ gilt, da g streng monoton wachsend ist. Nun folgt aus (4.2) und der Maximalinvarianz von T unter $\mathbb{G}_1$ die Existenz eines $\mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \in \mathbb{G}_1$ mit $y = \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(\hat{g}(x)) = \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)} \circ \hat{g}(x)$. Hieraus folgt die Maximalinvarianz von L unter $\mathbb{G}$. □

Nachdem wir einige Überlegungen zur Datenreduktion durch Invarianz angestellt haben, gehen wir noch auf die Reduktion durch suffiziente Statistiken ein.

4.2 Reduktion durch Suffizienz

Wir werden zeigen, dass die unter der Gruppe $\mathbb{G}_1$ maximalinvariante Statistik T, die die jeweiligen Teilstichproben nach aufsteigender Größe ordnet, auch suffizient ist für unser statistisches Experiment. Um dies zu zeigen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.8. *Sei $\mathbb{G}$ eine endliche Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen $g : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ und sei $T : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ eine Statistik, die die σ-Algebra $\mathcal{T}$ der unter $\mathbb{G}$ invarianten Mengen induziert, d.h.*

$$T^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{T} := \{A \in \mathcal{A} : g(A) = A \text{ für alle } g \in \mathbb{G}\}.$$

Dann ist T suffizient für die Familie aller unter $\mathbb{G}$ invarianten W-Maße auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$.

Beweis. Es bezeichne $\tilde{\mathfrak{W}}$ die Familie aller unter $\mathbb{G}$ invarianten W-Maße auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$, d.h.

$$\tilde{\mathfrak{W}} := \{\mathbb{P} : \mathbb{P} \text{ W-Maß auf } (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \text{ mit } \mathbb{P}^g = \mathbb{P} \text{ für alle } g \in \mathbb{G}\}.$$

Um zu zeigen, dass T suffizient für $\tilde{\mathfrak{W}}$ ist, genügt es zu zeigen, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine messbare Abbildung $f_A : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ existiert, sodass f_A für jedes $\mathbb{P} \in \tilde{\mathfrak{W}}$ eine Version des bedingten Erwartungswertes $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbf{1}_A \mid T)$ ist, d.h. sodass

$$\int_U \mathbf{1}_A d\mathbb{P} = \int_U f_A d\mathbb{P}$$

für alle $A \in \mathcal{A}, U \in \mathcal{T} = \sigma(T)$ und $\mathbb{P} \in \tilde{\mathfrak{W}}$ gilt.
Sei also $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Definiere die Abbildung $f_A : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ durch

$$f_A(x) := \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_A(g(x)) = \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_{g^{-1}(A)}(x).$$

Dann ist f_A $\mathcal{A}$-messbar und außerdem unter $\mathbb{G}$ invariant. Denn für beliebigs $h \in \mathbb{G}$ und $x \in \mathfrak{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_A(h(x)) &= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_A(g(h(x))) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_A(g \circ h(x)) \\ &= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_A(g(x)) \\ &= f_A(x). \end{aligned}$$

Die Invarianz von f_A unter $\mathbb{G}$ liefert nun die $\mathcal{T}$-Messbarkeit von f_A. Denn für beliebiges $B \in \mathcal{B}$ ist offenbar $f_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ und für alle $h \in \mathbb{G}$ gilt

$$h\left(f_A^{-1}(B)\right) = h\left((f_A \circ h)^{-1}(B)\right) = h\left(h^{-1}\left(f_A^{-1}(B)\right)\right) = f_A^{-1}(B)$$

und somit $f_A^{-1}(B) \in \mathcal{T}$.

Sei nun $\mathbb{P} \in \tilde{\mathfrak{W}}$ ein unter $\mathbb{G}$ invariantes W-Maß auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ und sei $U \in \mathcal{T}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_U f_A d\mathbb{P} &= \int_U \left(\frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \mathbf{1}_A \circ g \right) d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \int_U (\mathbf{1}_A \circ g)\, d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \int_{g^{-1}(U)} (\mathbf{1}_A \circ g)\, d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \int_{g(g^{-1}(U))} \mathbf{1}_A \; d\mathbb{P}^g \\
&= \frac{1}{|\mathbb{G}|} \cdot \sum_{g \in \mathbb{G}} \int_U \mathbf{1}_A \; d\mathbb{P} \\
&= \int_U 1_A \; d\mathbb{P} \cdot \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} 1 \\
&= \int_U 1_A \; d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $f_A = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathbf{1}_A \mid \mathcal{T} \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathbf{1}_A \mid \sigma(T) \right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathbf{1}_A \mid T \right)$ $\mathbb{P}$-fast sicher und damit die Behauptung. $\square$

Dass dieses Lemma nun tatsächlich die Suffizienz von $T = \left(T_{1,(\cdot)}, T_{2,(\cdot)} \right)$ für unser statistisches Experiment liefert, sieht man wie folgt ein:
Zunächst bildet die Verteilungsklasse $\mathfrak{W} = (F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2})_{(F_1,F_2) \in \Theta}$ wegen (4.1) eine Teilklasse der Familie aller unter $\mathbb{G}_1$ invarianten W-Maße. Ist also die Suffizienz von T für die Familie aller unter $\mathbb{G}_1$ invarianten W-Maße gezeigt, so folgt auch die Suffizienz von T für $\mathfrak{W}$. Ersteres lässt sich mithilfe von Lemma 4.8 zeigen. Offenbar ist $\mathbb{G}_1$ eine endliche Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mit $|\mathbb{G}_1| = n_1! \cdot n_2!$. Bleibt also zu zeigen, dass

$$T^{-1}(\mathcal{B}^n) = \mathcal{T} := \left\{ A \in \mathcal{B}^n : \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) = A \text{ für alle } (\pi_1, \pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2} \right\}$$

gilt. Offenbar gilt für beliebiges $A \in \mathcal{B}^n$: $T^{-1}(A) = \bigcup_{(\pi_1,\pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A \cap T(\mathbb{R}^n))$ und daher

$$T^{-1}(\mathcal{B}^n) = \left\{ \bigcup_{(\pi_1,\pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) \mid A \in \mathcal{B}^n \cap T(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Zu zeigen ist also:

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) \mid A \in \mathcal{B}^n \cap T(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Hierzu:
"$\subseteq$": Sei $A \in \mathcal{T}$ beliebig, d.h. $A \in \mathcal{B}^n$ und $A = \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A)$ für alle $(\pi_1,\pi_2) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}$. Dann gilt: $A = \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A)$. Außerdem gilt $T(A) = \mathbb{K}_{(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2})}(A) = A$ für ein geeignetes $(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2}) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}$. Somit folgt $A \subseteq T(\mathbb{R}^n)$ und daher $A \in \mathcal{B}^n \cap T(\mathbb{R}^n)$.
"$\supseteq$": Sei $B = \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A)$ mit $A \in \mathcal{B}^n \cap T(\mathbb{R}^n)$. Für beliebiges $(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2}) \in \Pi_{n_1} \times \Pi_{n_2}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2})}(B) &= \mathbb{K}_{(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2})}\left(\bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) \right) \\
&= \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\tilde{\pi_1},\tilde{\pi_2})} \circ \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) \\
&= \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) \\
&= B
\end{aligned}$$

sowie $B = \bigcup_{(\pi_1,\pi_2)\in\Pi_{n_1}\times\Pi_{n_2}} \mathbb{K}_{(\pi_1,\pi_2)}(A) = T^{-1}(A) \in \mathcal{B}^n$. Also ist $B \in \mathcal{T}$.

Nun lässt sich Lemma 4.8 anwenden und es folgt die Suffizienz von T für $\mathfrak{W} = (F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2})_{(F_1,F_2)\in\Theta}$.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben festgestellt, dass das in Abschnitt 2 vorgestellte Testproblem zum Vergleich zweier Behandlungsmethoden invariant ist sowohl unter der endlichen Gruppe $\mathbb{G}_1$ aller Permutationen der ersten n_1 und der übrigen n_2 Komponenten des Beobachtungsvektors, als auch unter der Gruppe $\mathbb{G}_2$ basierend auf den stetigen, streng monoton wachsenden und bijektiven Abbildungen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dabei haben wir gesehen, dass die zu $\mathbb{G}_1$ gehörende maximalinvariante Statistik $T = \left(T_{1,(\cdot)}, T_{2,(\cdot)}\right)$ zudem suffizient ist für das statistische Experiment $\mathcal{E} = \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, (F_1^{n_1} \otimes F_2^{n_2})_{(F_1,F_2)\in\Theta}\right)$. Das Problem lässt sich nun auf zwei verschiedene Weisen weiterbehandeln:

1. Reduktion durch Invarianz nur unter $\mathbb{G}_1$ mittels der maximalinvarianten Statistik $T = \left(T_{1,(\cdot)}, T_{2,(\cdot)}\right)$. Hierbei werden nur noch Tests betrachtet, die über T von den Beobachtungen abhängen, d.h. Tests von der Form $\psi^\star \circ T$. Dies bedeutet wegen

der gleichzeitigen Suffizienz von T zudem keinen Infomationsverlust. Über diesen Ansatz gelangen wir zu den Pitmanschen Permutationstests.

2. Reduktion durch Invarianz unter $\mathbb{G}_1$ und $\mathbb{G}_2$, also unter $\mathbb{G}$, mittels der zugehörigen maximalinvarianten Statistik $L = R \circ T$, die die Rangzahlen der ersten sowie der zweiten Teilstichprobe der Größe nach aufsteigend ordnet. Somit werden nur noch Tests betrachtet, die über L vom eigentlichen Beobachtungsvektor abhängen. Dies führt dazu, dass die Information der tatsächlich gemessenen Werte aufgegeben und stattdessen nur noch mit deren Rängen weitergearbeitet wird. Diese Herangehensweise führt zu den Rangtests.