A Kurzskript: Stochastische Majorisierung und Testtheorie

A.1 Stochastische Majorisierung

Definition A.1 (stochastisch größer)
Seien $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ zwei W'Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Dann heißt $\mathbb{Q}$ stochastisch größer als $\mathbb{P}$ (alternative $\mathbb{Q}$ majorisiert $\mathbb{P}$), falls

$$\mathbb{Q}((x, \infty)) \geq \mathbb{P}((x, \infty)) \quad [F_{\mathbb{Q}}(x) \leq F_{\mathbb{P}}(x)] \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Notation: $\mathbb{Q} \succeq \mathbb{P}$.
Gilt außerdem $\mathbb{P} \neq \mathbb{Q}$, so schreiben wir $\mathbb{Q} \succ \mathbb{P}$.

Die anschauliche Interpretation liegt auf der Hand: $\mathbb{Q}$ ist stochastisch größer als $\mathbb{P}$, wenn $\mathbb{Q}$ für jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ mehr Masse rechts von x als $\mathbb{P}$ besitzt. Dies impliziert:

Satz A.2
Seien X, Y Zufallsvariablen sowie $\mathbb{Q}, \mathbb{P}$ W'Maße mit $X \sim \mathbb{Q}, Y \sim \mathbb{P}$. Dann gilt die Implikation

$$\mathbb{Q} \succeq \mathbb{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y.$$

A.2 Testtheorie

Setting: Gegeben sei ein statistisches Experiment $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, (W_\theta)_{\theta\in\Theta})$, bestehend aus einem messbaren Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ und einer Familie $(W_\theta)_{\theta\in\Theta}$ von W'Maßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Zudem sei X : $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{A})$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}_\theta^X = W_\theta$.

Definition A.3 (Statistik/Test)
Sei $(\mathcal{X}', \mathcal{A}')$ ein Messraum. Eine messbare Funktion

$$\mathrm{T}: \ (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$$

heißt Statistik. Ein Test oder eine Testfunktion auf $\mathcal{X}$ ist eine Statistik φ mit

$$\varphi: \ \mathcal{X} \to [0, 1].$$

Wir betrachten in den folgenden Abschnitten ein Testproblem H gegen K mit

- $H, K \subset \Theta$
- $H \cup K = \Theta$ und
- $H \cap K = \emptyset$.

A.2.1 Gleichmäßig beste Tests

Definition A.4 (Test zum Niveau α)
Ein Test φ heißt Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$, falls

$$\mathbb{E}_\theta \varphi(X) \leq \alpha$$

für alle $\theta \in H$. Es bezeichne Φ_α die Gesamtheit aller Tests zum Niveau α.

Definition A.5 (Gleichmäßig bester Test)
Ein Test φ^* heißt gleichmäßig bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$, falls $\varphi^* \in \Phi_\alpha$ und

$$\mathbb{E}_\theta \varphi^*(X) = \max_{\varphi\in\Phi_\alpha} \mathbb{E}_\theta \varphi(X) \quad \textit{für alle } \theta \in K.$$

Satz A.6 (Neyman-Pearson-Lemma)
Seien $\mathbb{Q}_0$ und $\mathbb{Q}_1$ W'Maße auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ mit Dichten f_0 bzw f_1 bzgl. eines dominierenden Maßes μ (etwa $\mu = \mathbb{Q}_0 + \mathbb{Q}_1$).
Ferner sei $\alpha \in (0,1)$ und $\Phi_\alpha = \{\varphi : \varphi \text{ Test mit } \int \varphi \, d\mathbb{Q}_0 \leq \alpha\}$. Dann gilt:

- *(Hinreichende Bedingung) Sei ψ ein Test mit*

  1. $\int \psi \, d\mathbb{Q}_0 = \alpha$
  2. *Es existiert ein $k \in [0, \infty)$ derart, dass*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & f_1(x) > kf_0(x) \\ 0 & f_1(x) < kf_0(x) \end{cases} \quad \mu\text{-f.ü.} \tag{A.1}$$

  Dann folgt

$$\int \psi \, d\mathbb{Q}_1 = \max_{\varphi \in \Phi_\alpha} \int \varphi \, d\mathbb{Q}_1. \tag{A.2}$$

- *(Existenz) Es existiert ein Test ψ, der die Voraussetzungen (**??**) und (**??**) erfüllt.*

A.2.2 Unverfälschte Tests

Definition A.7 (Unverfälschtheit)
Ein Test φ heißt unverfälscht zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, falls

- $\mathbb{E}_\theta \varphi(X) \leq \alpha$ *für alle $\theta \in H$*
- $\mathbb{E}_\theta \varphi(X) \geq \alpha$ *für alle $\theta \in K$*

Es bezeichne Φ_α^u die Gesamtheit aller unverfälschten Tests zum Niveau α.

Definition A.8 (Gleichmäßig bester unverfälschter Test)
Ein Test φ^* heißt gleichmäßig bester unverfälschter Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$, falls $\varphi^* \in \Phi_\alpha^u$ und

$$\mathbb{E}_\theta \varphi^*(X) = \max_{\varphi \in \Phi_\alpha^u} \mathbb{E}_\theta \varphi(X) \quad \text{für alle } \theta \in K.$$

A.2.3 Invarianz

Definition A.9
Sei $\mathcal{E} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathfrak{W})$ mit $\mathfrak{W} = (W_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Experiment und $\mathbb{G}$ eine Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen $g : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ versehen mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung. Dann heißt $\mathfrak{W}$ invariant unter $\mathbb{G}$, falls gilt

$$W_\theta^g \in \mathfrak{W} \; \forall \theta \in \Theta, g \in \mathbb{G}.$$

Ein Testproblem heißt invariant unter $\mathbb{G}$, falls die Verteilungsklassen

$$\mathfrak{W}_H := \{W_\theta : \theta \in H\} \;\; \textit{und} \; \mathfrak{W}_K := \{W_\theta : \theta \in K\}$$

jeweils invariant unter $\mathbb{G}$ sind.

Definition A.10
Sei $\mathcal{E} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathfrak{W})$ mit $\mathfrak{W} = (W_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ein statistisches Experiment und $\mathbb{G}$ eine Gruppe messbarer bijektiver Abbildungen. Sei $T : (\mathfrak{X}, \mathcal{A}) \to (\mathfrak{X}', \mathcal{A}')$ eine Statistik.

- *T heißt invariant unter $\mathbb{G}$, falls $T(g(x)) = T(x)$ für alle $g \in \mathbb{G}$ und $x \in \mathfrak{X}$ gilt.*
- *T heißt maximalinvariant unter $\mathbb{G}$, falls T invariant unter $\mathbb{G}$ ist und zu je zwei Punkten $x, y \in \mathfrak{X}$ mit $T(x) = T(y)$ ein $g \in \mathbb{G}$ existiert, sodass $g(x) = y$.*

Ist eine Statistik T also invariant, so gilt $\{g(x) : g \in \mathbb{G}\} \subseteq T^{-1}(T(x))$ für alle $x \in \mathfrak{X}$. Ist T maximalinvariant, so gilt auch $T^{-1}(T(x)) \subseteq \{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$, also $T^{-1}(T(x)) = \{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$. Somit besitzen die maximalinvarianten Statistiken unter den invarianten die größte Feinstruktur insofern, als ihre Konstanzbereiche $T^{-1}(T(x))$, $x \in \mathfrak{X}$, genau den Mengen $\{g(x) : g \in \mathbb{G}\}$, genannt Trajektorie des Punktes x unter $\mathbb{G}$, entsprechen.

A.2.4 Suffienz und Vollständigkeit

Definition A.11 (Suffizienz)
Eine Statistik $\mathrm{T} : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$ *heißt suffizient für* $\mathcal{E}$*, falls für jedes* $A \in \mathcal{A}$ *eine meßbare Abbildung* $\mathrm{W(A|T = \cdot)} : \ \mathcal{X}' \to [0, 1]$ *existiert, so dass* $W(A|T = \cdot)$ *für jedes* $\theta \in \Theta$ *eine Version der faktorisierten bedingten Wahrscheinlichkeit* $W_\theta(A|T = \cdot)$ *bildet. Dies bedeutet, dass*

$$W_\theta(A \cap T^{-1}(A')) = \int_{A'} W(A|T = t) \ W_\theta^T(dt)$$

für alle $A \in \mathcal{A}, A' \in \mathcal{A}'$ *und* $\theta \in \Theta$ *gelten soll.*

Eine Statistik T heißt also suffizient für $\mathcal{E}$, falsch die bedingte Verteilung $\mathbb{P}_\theta^{X|T(X)=t}$ unter jedem $\mathbb{P}_\theta$ dieselbe ist, d.h. von θ nicht mehr abhängt.

Definition A.12 (Vollständigkeit)
Eine Statistik $\mathrm{T} : \ (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$ *heißt vollständig für* $\mathcal{E}$, *falls die Implikation gilt:*

$$\mathbb{E}_\theta f(T(X)) = 0 \ \textit{f.a.} \ \theta \in \Theta \Rightarrow f \equiv 0 \ \mathbb{P}_\theta^{T(X)}\textit{-f.s. f.a.} \ \theta \in \Theta$$

A.2.5 J-ähnliche Tests

Definition A.13 (J-Ähnlichkeit)
Sei J *eine beliebige Teilmenge von* Θ. *Ein Test* $\varphi : \ \mathcal{X} \to [0, 1]$ *heißt ähnlich auf* J *zum Niveau* α *oder auch* J*-ähnlich zum Niveau* α*, falls*

$$\mathbb{E}_\theta(\varphi(X)) = \alpha \quad \textit{für alle } \theta \in J.$$

Die Menge aller solcher Tests bezeichnen wir mit $\Phi_{J,\alpha}$.

Satz A.14
Bezeichne $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ *die Menge der W'Maße auf* $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. *Sei* φ *ein Test auf* $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ *und* $\overline{H}, \overline{K}$ *der topologische Abschluss von* H, K *bzgl.* d_V $(d_V(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mathbb{P}(A) - \mathbb{Q}(A)|)$. *Dann gilt*

1. *die Gütefunktion* $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{E}_\mathbb{P}\varphi$ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathcal{W}(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ *bezüglich* d_V.

2. *Ist* φ *ein unverfälschter Test zum Niveau* α *für* H *gegen* K, *wobei* $H, K \subseteq \mathcal{W}$ *beliebig mit* $J = \overline{H} \cap \overline{K} \neq \emptyset$, *so ist* φ J*-ähnlich zum Niveau* α.

A.2.6 Bedingte Tests (Kapital 20 Alsmeyer)

Nun sei $\mathcal{E} = (\mathcal{X}, \mathcal{A}, (W_\theta)_{\theta\in\Theta})$ ein statistisches Experiment mit $\Theta \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$. Zudem bezeichne $T : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$ eine suffiziente Statistik für $\mathcal{E}$ und wir definieren $\mathbb{E}_{\vartheta,T}(\varphi) := \mathbb{E}_\vartheta(\varphi \circ T(X))$.

Wegen der Suffizienz von T existiert zu jedem Text φ ein ebenso guter Test ϕ der Form $\psi \circ T$, und zwar $\phi = W(\varphi|T)$. Aus diesem Grund betrachten nur noch das durch T reduzierte Experiment $\mathcal{E}^T = (\mathcal{X}', \mathcal{A}', (W_\theta^T)_{\theta\in\Theta})$, wobei nun $\Phi_{J,\alpha}$ die Menge aller J-ähnlichen Tests $\psi : \mathcal{X}' \to [0,1]$ bezeichne.

Lemma A.15 (Lemma 20.2 im Alsmeyer)
Sei $V : (\mathcal{X}', \mathcal{A}') \to (\mathcal{X}'', \mathcal{A}'')$ eine vollständige und suffiziente Statistik für $(W_\theta^T)_{\theta\in J}$. Dann gilt:

$$\psi \in \Phi_{J,\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\cdot,T}(\psi|V) = \alpha \quad W_\theta^T\text{-f.s. für alle } \theta \in J.$$

Lemma A.16 (Lemma 20.3 im Alsmeyer)
*Sei $\vartheta \in \Theta \setminus J$ und V wie in Lemma **??**. Dann gilt für $\psi^* \in \Phi_{J,\alpha}$:*

$$\mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi^*) = \max_{\psi\in\Phi_{J,\alpha}} \mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi^*|V) \geq \mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi|V) \ W_\vartheta^T\text{-f.s. für alle } \psi \in \Phi_{J,\alpha}.$$

Zusammenfassend besagen **??** und **??**, dass bei Vorliegen einer vollständigen und suffizienten Statistik V für $W_\theta^T)_{\theta\in J}$ die folgenden Problemstellungen äquivalent sind:

1. Finde einen Test $\psi^* : \ \mathcal{X}' \to [0,1]$ mit
   - $\mathbb{E}_{\theta,T}(\psi^*) = \alpha$ für alle $\theta \in J$
   - $\mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi^*) = \max_{\psi\in\Phi_{J,\alpha}} \mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi)$
2. Finde einen Test $\psi^* : \ \mathcal{X}' \to [0,1]$ mit
   - $\mathbb{E}_{J,T}(\psi|V) = \alpha \quad W_\theta^T$-f.s. für alle $\theta \in J$
   - $\mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi^*|V) \geq \mathbb{E}_{\vartheta,T}(\psi|V) \quad W_\vartheta^T$-f.s. für alle $\psi \in \Phi_{J,\alpha}$