Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

> Das Hopfield-Modell als Modell sozialer Interaktionen

Seminarvortrag von Daniela Duhme
13. Februar 2013

wissen.leben
WWU Münster

Institut für
Mathematische Statistik
Fachbereich
Mathematik und Informatik

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Im Rahmen dieses Seminarvortrags, welcher hauptsächlich auf [2] basiert, wollen wir uns mit der folgenden Situation beschäftigen:
Einer Gruppe von N Personen wird eine Frage mit binärer Wahlmöglichkeit gestellt. Beispielsweise möchten wir wissen, ob eine Person raucht. Hierzu äußern sich die Individuen dann immer wieder nacheinander unter Kenntnis aller anderen Entscheidungen mit $+1$ (Nichtraucher), oder mit -1 (Raucher). Wir gehen also davon aus, dass man sich immer wieder neu entscheidet, ob man raucht oder nicht. Unser heutiges Ziel ist es, die Entwicklung des Meinungsbildes in dieser Gruppe zu modellieren. Forschungsarbeiten lassen vermuten, dass Individuen sich bei ihrer Entscheidung durch die Meinung anderer beeinflussen lassen und sich tendentiell der Meinung von ihnen ähnlichen Individuen anschließen. Daher wollen wir die Aspekte

- Heterogenität der individuellen Präferenzen und
- soziale Interaktion

bei unserer Modellierung besonders berücksichtigen.

Zunächst wollen wir das Modell zur Untersuchung der Meinungsentwicklung herleiten. Dabei werden wir feststellen, dass das resultierende Modell genau das Hopfield-Modell ist. Im zweiten Kapitel werden wir die Langzeitverteilung des Meinungsbildes in einer Population der Größe N angeben. Anschließend werden wir beschreiben, wie sich eine sehr große Population langfristig und unter Einfluss von verschiedenen Werten für den Gruppendruck β verhält. Im letzten Kapitel wollen wir unser Modell erweitern, indem wir mit einbringen, ob ein Individuum mit einem anderen kommunizieren kann oder nicht.

1 Das Modell

Wir stellen N Individuen eine Frage mit binärer Wahlmöglichkeit, wobei $s_i \in \{+1, -1\}$ die Entscheidung des i-ten Individuums darstellt und $s = (s_j)_{1 \leq j \leq N}$ das zufällige Meinungsbild der Bevölkerung. Jeder Befragte misst dabei den Einfluss aller Meinungen auf die eigene Entscheidung durch eine individuelle Funktion

$$h_i(s) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^{N} J_{i,j} \cdot s_j.$$

Hierbei beschreiben die Gewichte $J_{i,j} \in \mathbb{R}$ den Einfluss der Meinung s_j des j-ten Individuums auf die Neuentscheidung des i-ten Individuums.

Beispiel 1.1.
Wenn jedes Individuum jeden Befragten im gleichen Maße beeinflusst, so wie in Abbildung 1.1, dann haben die Gewichte die Form

$$J_{i,j} = J, \ \forall i, j, \ J \in \mathbb{R}.$$

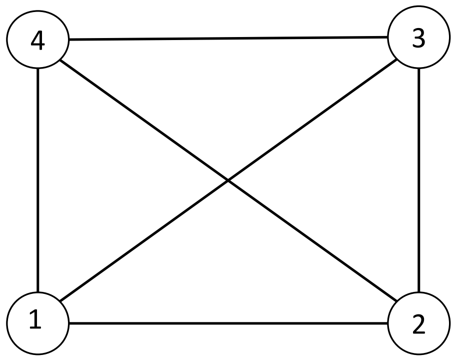

Abbildung 1.1: Illustration des Einflusses zwischen den Individuen 1 *bis* 4 *unter der Annahme* $J_{i,j} = J$*. Die Dicke der Verbindungslinien symbolisiert die Stärke des Einflusses.*

Studien zeigen allerdings, dass dieser Ansatz nicht besonders realistisch ist. Die Befragten schließen sich eher den Meinungen von ihnen ähnlichen Individuen, das heißt Individuen mit ähnlichen Charakteristika, an.

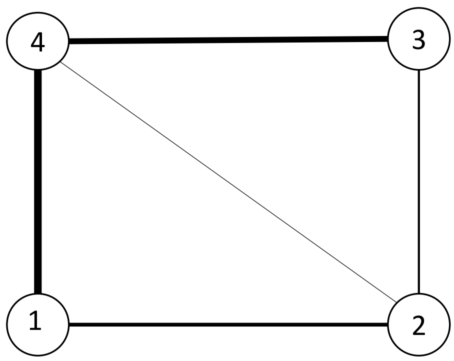

Abbildung 1.2: Illustration des Einflusses zwischen den Individuen 1 *bis* 4 *in einem realitätsnäheren Modell. Die Dicke der Verbindungslinien symbolisiert wieder die Stärke des Einflusses.*

Wir wollen jedes unserer N Individuen mit jeweils M zufälligen Ausprägungen von Charakteristika ausstatten. Dazu wird das i-te Individuum für $i = 1, .., N$ durch den Vektor

$$\xi_i = (\xi_i^1, .., \xi_i^M) = (\xi_i^\mu)_{1 \leq \mu \leq M}$$

beschrieben. Wir nehmen an, dass jedes Charakteristikum nur zwei Werte $\xi_i^\mu \in \{+1, -1\}$ annehmen kann, jeweils mit einer relativen Häufigkeit von 1/2. Dies führt dann zu

$$\mathbb{E}[\xi_i^\mu] = 0,$$

das bedeutet, dass es keine Dominanz einzelner Ausprägungen von Eigenschaften in der Bevölkerung gibt. Außerdem wollen wir die Eigenschaften so wählen, dass die $(\xi_i^\mu)_{i,\mu}$ unabhängig voneinander sind. Das heißt, dass wir zum Beispiel nicht gleichzeitig die Eigenschaften „Gesundheitszustand" und „Alter" in das Modell einbauen können, da diese korreliert sind. Weiter ist es sicherlich sinnvoll Eigenschaften zu wählen, die im Bezug zur Frage stehen. Denkbare Charakteristika für unsere Frage nach dem Rauchen sind beispielsweise das Alter, das Geschlecht und die Religionszugehörigkeit.

1.1 Die Befragung der Individuen

Mit $\sigma_i(n)$ bezeichnen wir die Entscheidung des i-ten Individuums zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ und mit $\sigma(n) = \big(\sigma_i(n)\big)_{1\leq i\leq N}$ das Meinungsbild der Population zur Zeit n.

Die Befragung der Individuen erfolgt nun folgendermaßen:

1. Wir starten mit einem beliebigen Meinungsbild $\sigma(0) \in \{+1, -1\}^N$ und teilen dies allen Individuen mit.

2. Das erste Individuum überdenkt seine Entscheidung auf Grundlage des aktuellen Meinungsbildes $\sigma(0)$ und teilt die neue Entscheidung allen mit.

3. Auf Grundlage dieses neuen Meinungsbildes $\sigma(1)$ überdenkt dann das nächste Individuum seine Entscheidung usw.

Zur Zeit $n-1$ überdenkt also genau ein Individuum ξ_i seine Entscheidung unter Berücksichtigung des aktuellen Meinungsbildes $\sigma(n-1)$. So entsteht das neue Meinungsbild $\sigma(n)$, welches sich von $\sigma(n-1)$ höchstens in der i-ten Koordinate unterscheidet.

1.2 Wie die Individuen ihre Entscheidung überdenken

Wie zu Beginn von Kapitel 1 schon angedeutet, wird jedes Individuum bei seiner Neuentscheidung durch eine Gesamtmeinung der Form

$$h_i(s) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{N} J_{i,j} \cdot s_j$$

mit individuellen Gewichten $J_{i,j}$ beeinflusst. Die Gewichte sollten so gewählt werden, dass Folgendes gilt: Je mehr Charakteristika zweier Individuen ξ_i und ξ_j übereinstimmen, desto stärker sind ihre Entscheidungen positiv korreliert. Je weniger Charakteristika übereinstimmen, desto stärker sind die Entscheidungen negativ korreliert. Wir wählen die Gewichte wie folgt:

$$J_{i,j} := \sum_{\mu=1}^{M} \xi_i^\mu \cdot \xi_j^\mu = \langle \xi_i, \xi_j \rangle.$$

Diese Herangehensweise an die Modellierung der Meinungsentwicklung wird uns schließlich zum Hopfield-Modell führen. Das Hopfield-Modell ist ein Modell zur

Untersuchung amorpher Systeme und wurde vor allem durch seine Anwendung auf neuronale Netze[1], siehe [1], populär. In einem amorphen Stoff[2] leben die Atome nicht auf einem festen Gitter, sondern bilden ein unregelmäßiges Muster. Dieses unregelmäßige Muster entspricht in unserem Modell der unterschiedlich starken Beeinflussung zwischen den einzelnen Individuen.

Definition 1.2 (Übergangswahrscheinlichkeit)**.**
Ist nun zum Zeitpunkt $n-1$ das i-te Individuum an der Reihe, seine Meinung zu überdenken, so tut es dies gemäß der Verteilung

$$\mathbb{P}\Big(\sigma_i(n)=+1\Big)=\frac{\exp\Big(\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)}{\exp\Big(\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)+\exp\Big(-\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)}\ ,$$

$$\mathbb{P}\Big(\sigma_i(n)=-1\Big)=\frac{\exp\Big(-\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)}{\exp\Big(\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)+\exp\Big(-\beta\cdot h_i\big(\sigma(n-1)\big)\Big)}\ . \tag{1.1}$$

Hierbei beschreibt der Parameter $\beta\in\mathbb{R},\ \beta>0$ die Stärke des Gruppendrucks, also wie stark sich das i-te Individuum dazu gezwungen fühlt, sich der Gesamtmeinung h_i anzuschließen.

- *Für $\beta\to 0$, also keinem vorhandenen Gruppendruck, entscheiden sich die Individuen rein zufällig, das heißt*

$$\mathbb{P}\Big(\sigma_i(n)=+1\Big)=\frac{1}{2}=\mathbb{P}\Big(\sigma_i(n)=-1\Big).$$

- *Unter sehr großem Gruppendruck, also $\beta\to\infty$, schließen sich die Individuen grundsätzlich der Gesamtmeinung[3] an:*

$$\mathbb{P}\Big(\sigma_i(n)=sgn\big(h_i(\sigma(n-1))\big)\Big)=1\ .$$

2 Das Meinungsbild auf lange Sicht – Bestimmung des Gleichgewichtsmaßes

Wir haben nun eine Folge $\big(\sigma(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen, welche sich gemäß der in (1.1) beschrieben Dynamik verhält, mit zugehörigem endlichen Zustandsraum $S=\{+1,-1\}^N$. In diesem Kapitel interessieren wir uns für die Verteilung des Meinungsbildes $\sigma(n)$ zum Zeitpunkt n für $n\to\infty$, also für das Langzeitverhalten des Meinungsbildes in einer Bevölkerung.

[1] Veröffentlicht in 1982

[2] Z.B. Glas

[3] Für den Fall sgn(0) werden wir immer eine faire Münze werfen.

Bemerkung 2.1.
Wenn wir die Charakteristika der Individuen fix lassen, sprich für feste Realisierungen der $(\xi_i^\mu)_{i,\mu}$*, dann ist* $(\sigma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *eine inhomogene Markov-Kette, denn dann ist ausschließlich* $\sigma(n-1)$ *entscheidend für* $\sigma(n)$*.*

Die zugehörige Übergangmatrix zum Zeitpunkt n hat dann folgende Gestalt:

$$Q_n := \Big(Q_n(r,s)\Big)_{r,s\in S} = \bigg(\mathbb{P}\Big(\sigma(n) = s \mid \sigma(n-1) = r\Big)\bigg)_{r,s\in S}.$$

Q_n hat in jeder Spalte und Zeile genau zwei Einträge, die nicht Null sind, da ja zu jedem Zeitpunkt nur ein Individuum, nämlich das, welches an der Reihe ist, seine Meinung ändern kann. Für den Fall, dass das i-te Individuum an der Reihe ist, gilt dann

$$Q_n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{\exp\Big(s_i \cdot \beta \cdot h_i(r)\Big)}{\exp\Big(\beta \cdot h_i(r)\Big) + \exp\Big(-\beta \cdot h_i(r)\Big)} & \text{falls } r_j = s_j \ \forall\ j \neq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.1}$$

Die Markov-Kette ist irreduzibel[4], da jedes Individuum seine Meinung mit positiver Wahrscheinlichkeit ändert. Des Weiteren ist sie aperiodisch[5], da jedes Individuum seine Meinung mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht ändern wird.
Wir möchten gleich folgenden Satz anwenden:

Satz 2.2 (Ergodensatz).
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine homogene Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum* S *mit Übergangsmatrix* Q*. Falls die Markov-Kette irreduzibel und aperiodisch ist, so existiert eine eindeutige stationäre Verteilung* μ *mit*

$$\mu \cdot Q = \mu$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = s \mid X_0 = r) = \mu(s) \quad \forall\ r,s\ \in\ S.$$

Wir nennen μ *dann das Gleichgewichtsmaß der Markov-Kette.*

Um den Ergodensatz anwenden zu können, müssen wir unsere inhomogene Markov-Kette in eine homogene überführen. Hierzu beobachten wir Meinungsbilder jetzt nur noch am Ende eines vollständigen Entscheidungsdurchlaufes, d.h. Meinungsbilder der Form

$$\sigma(n) \text{ mit } n = n' \cdot N,\ n' \in \mathbb{N}.$$

Die Übergangsmatrix vom Zeitpunkt $(n'-1)N$ nach $n'N$ hat dann die Gestalt

$$Q_{(n'-1)N+1} \cdot Q_{(n'-1)N+2} \cdot \ldots \cdot Q_{(n'-1)N+N} = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_N =: Q.$$

[4] D.h.: $\forall\ r,s \in S\ \exists\ n_0 : \mathbb{P}\big(\sigma(n_0) = s \mid \sigma(0) = r\big) > 0$

[5] D.h.: $\forall\ s \in S : \mathrm{ggT}\Big\{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P}\big(\sigma(n) = s \mid \sigma(0) = s\big) > 0\Big\} = 1$

Wir erhalten so eine homogene Markov-Kette, die nach wie vor irreduzibel und aperiodisch ist. Durch den Ergodensatz wissen wir nun, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mu_{\beta,N}$ auf dem Zustandsraum S existiert, sodass gilt

$$\lim_{n'\to\infty} \mathbb{P}\Big(\sigma(n'N) = s \mid \sigma(0) = r\Big) = \mu_{\beta,N}(s) \quad \forall\ s, r\ \in\ S.$$

$\mu_{\beta,N}$ wird eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$\mu_{\beta,N} \cdot Q = \mu_{\beta,N}$$

oder äquivalent

$$\mu_{\beta,N} \cdot Q_i = \mu_{\beta,N} \quad \forall\ 1 \leq i \leq N. \tag{2.2}$$

Wir wollen unser Gleichgewichtsmaß $\mu_{\beta,N}$ nun explizit angeben.

Satz 2.3 (Das Gleichgewichtsmaß).
Das Gibbsmaß [6]

$$\mu_{\beta,N}(s) = \frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(s)\Big)}{Z_N(\beta)} \quad , \textit{mit } s \in S,\ Z_N(\beta) = \sum_{s\in S} \exp\Big(\beta \cdot H_N(s)\Big)$$

$$\textit{und } {}^7 H_N(s) = \frac{1}{2N}\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{M} \xi_i^\mu \cdot \xi_j^\mu \cdot s_i \cdot s_j = \underbrace{\frac{M}{2}}_{\textit{(i=j)-Teil}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} s_i \cdot h_i(s)$$

erfüllt (2.2) bei festen Realisierungen der Charakteristika und ist somit das gesuchte Gleichgewichtsmaß.

Beweis.
Wir gehen wieder davon aus, dass das i-te Individuum an der Reihe ist. Zunächst gilt

($\star$)
$$(\mu_{\beta,N}Q_i)(s) = \sum_{r\in S} \mu_{\beta,N}(r)Q_i(r,s) = \sum_{r\in\{s,\bar{s}\}} \mu_{\beta,N}(r)Q_i(r,s),$$

wobei $\bar{s_i} = -s_i$ und $\bar{s_j} = s_j \quad \forall j \neq i$, d.h. diese Meinungsbilder unterscheiden sich nur in der Meinung des i-ten Individuums.

($\star\star$) $h_i(s) = h_i(\bar{s})$.

($\star\star\star$) $h_j(\bar{s}) = h_j(s) - \dfrac{2}{N}\langle\xi_i, \xi_j\rangle s_i \quad \forall j \neq i.$

[6]Dieses Maß entnehmen wir dem Hopfield-Modell.

[7]H_N ist die Energiefunktion aus dem Hopfield-Modell.

$(\star\star\star\star)$ $H_N(\bar{s}) = H_N(s) - 2 \cdot s_i \cdot h_i(s)$.

Beweis. $(\star\star\star\star)$(Wird im Seminarvortrag nicht vorgeführt)

$$\begin{aligned}
H_N(\bar{s}) &= \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \bar{s}_j \cdot h_j(\bar{s}) \\
&= \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{N} s_j \cdot h_j(\bar{s}) + \frac{1}{2} \cdot (-s_i) \cdot h_i(\bar{s}) \\
&\overset{(\star\star)\text{und}(\star\star\star)}{=} \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{N} s_j \cdot \Big(h_j(s) - \frac{2}{N}\langle \xi_i, \xi_j \rangle \cdot s_i\Big) + \frac{1}{2} \cdot (-s_i) \cdot h_i(s) \\
&= \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} s_j \cdot h_j(s) - \frac{1}{2} \cdot s_i \cdot h_i(s) - \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \cdot s_i \cdot s_j \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot (-s_i) \cdot h_i(s) \\
&= H_N(s) - s_i \cdot h_i(s) - h_i(s) \cdot s_i \\
&= H_N(s) - 2 \cdot s_i \cdot h_i(s).
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
(\mu_{\beta,N} Q_i)(s) &\overset{(\star)}{=} \mu_{\beta,N}(s) \cdot Q_i(s,s) + \mu_{\beta,N}(\bar{s}) \cdot Q_i(\bar{s}, s) \\
&= \frac{1}{Z_N(\beta)} \cdot \Bigg[\exp\Big(\beta \cdot H_N(s)\Big) \cdot \frac{\exp\Big(s_i \cdot \beta \cdot h_i(s)\Big)}{\exp\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big) + \exp\Big(-\beta \cdot h_i(s)\Big)} \\
&\quad + \exp\Big(\beta \cdot H_N(\bar{s})\Big) \cdot \frac{\exp\Big(s_i \cdot \beta \cdot h_i(\bar{s})\Big)}{\exp\Big(\beta \cdot h_i(\bar{s})\Big) + \exp\Big(-\beta \cdot h_i(\bar{s})\Big)} \Bigg] \\
&\overset{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{=} \frac{1}{Z_N(\beta)} \cdot \left[\frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(s) + \beta \cdot s_i \cdot h_i(s)\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big)} + \frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(\bar{s}) + \beta \cdot s_i \cdot h_i(\bar{s})\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(\bar{s})\Big)} \right] \\
&\overset{(\star\star)\text{und}(\star\star\star\star)}{=} \frac{1}{Z_N(\beta)} \cdot \left[\frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(s) + \beta \cdot s_i \cdot h_i(s)\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big)} + \frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(s) - \beta \cdot s_i \cdot h_i(s)\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big)} \right] \\
&= \frac{\exp\Big(\beta \cdot H_N(s)\Big)}{Z_N(\beta)} \cdot \underbrace{\left[\frac{\exp\Big(\beta \cdot s_i \cdot h_i(s)\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big)} + \frac{\exp\Big(-\beta \cdot s_i \cdot h_i(s)\Big)}{2 \cdot \cosh\Big(\beta \cdot h_i(s)\Big)} \right]}_{=1} \\
&= \mu_{\beta,N}(s)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.4.
Für konstante Gewichte $J_{i,j} = J$ erhält man das Curie-Weiss-Modell.

Wir haben herausgefunden, dass das Langzeitverhalten des Meinungsbildes gemäß $\mu_{\beta,N}$ verteilt ist. Daher interessieren wir uns nun für Eigenschaften von $\mu_{\beta,N}$ für verschiedene Parameter β des Gruppendrucks und große Populationen, also $N \to \infty$.
Man kann zeigen, dass sich die Individuen für verschiedene Werte des Gruppendrucks β unterschiedlich verhalten. Dies nennt man in der statistischen Mechanik auch Phasenübergang. Genauer:

(i) Bei geringem Gruppendruck $\beta \leq 1$ weicht das Verhalten der Individuen nicht signifikant von einem rein zufälligen Verhalten ab. Ob ein Individuum ein Charakteristikum besitzt oder nicht, hat keine erkennbare Auswirkung auf seine Entscheidung.

(ii) Unter großem Gruppendruck hingegen, d.h. $\beta > 1$, wird aus den M Charakteristika zufällig das μ-te ausgewählt. Nur dieses Charakteristikum besitzt eine Korrelation mit der Entscheidung, die von Null abweicht. Es gilt dann folgendes:
Die Individuen mit der μ-ten Eigenschaft, also mit $\xi_i^\mu = +1$, entscheiden sich eher für $+1$ und die Individuen ohne diese Eigenschaft ziehen die Entscheidung -1 vor, oder umgekehrt. Die anderen Charakteristika haben keine erkennbare Auswirkung auf die Entscheidung.

Der Beweis erfolgt wie der im Curie-Weiss-Modell, wobei man statt der Gesamtmagnetisierung den Zusammenhang von den einzelnen Charakteristika und allen Meinungen betrachtet. Dieser ist durch $m_N(s) = \left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \xi_i^\mu s_i\right)_{1\leq\mu\leq M}$ gegeben.

3 Modifikation des Modells: Eingeschränkte Kommunikation

In der Realität ist es so, dass nicht jedes Individuum Kenntnis von allen anderen Meinungen hat. Es kennt nur die Entscheidungen derjenigen Individuen, mit denen es kommunizieren kann. Diesen Aspekt wollen wir in das Modell integrieren und somit die sehr restriktive Annahme, dass jedes Individuum alles weiß, fallen lassen.

Wir definieren die Zufallsvariable $\varepsilon_{i,j}$, für $i, j \in \{1, .., N\}$ mit
$\mathbb{P}(\varepsilon_{i,j} = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_{i,j} = 0)$. Hierbei bedeutet $\varepsilon_{i,j} = 1$, dass das i-te mit dem j-ten Individuum kommunizieren kann und $\varepsilon_{i,j} = 0$, dass sie nicht kommunizieren können. Des Weiteren fordern wir, dass die $(\varepsilon_{i,j})_{i,j}$ unabhängig voneinander und unabhängig von den Charakteristika $(\xi_i^\mu)_{i,\mu}$ sind. In unserem Modell aus Kapitel 2, genauer Satz 2.3, wird dann die Energiefunktion $H_N(s)$ durch die modifizierte

Funktion[8]

$$H_N^{komm}(s) = \frac{1}{2Np} \cdot \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{\mu=1}^{M} s_i \cdot s_j \cdot \xi_i^\mu \cdot \xi_j^\mu \cdot \varepsilon_{i,j}$$

ersetzt. Man kann zeigen, dass für $pN \longrightarrow \infty$ auch in diesem modifizierten Modell das Verhalten der Bevölkerung für fast alle Kommunikationsstrukturen, also für fast alle Realisierungen von $\varepsilon_{i,j}$, dem am Ende von Kapitel 2 beschriebenen entspricht.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst haben wir ein Modell zur Untersuchung der Meinungsentwicklung hergeleitet und dabei die beiden zu Beginn genannten Aspekte berücksichtigt. Die soziale Interaktion fließt über den Gruppendruck und die Möglichkeit der Kommunikation mit ein. Die Heterogenität individueller Präferenzen wird durch die Ausstattung der Individuen mit Eigenschaften und durch die Betrachtung der individuellen Gesamtmeinung integriert. Wir stellten fest, dass das hergeleitete Modell genau dem Hopfield-Modell entspricht. Im folgenden Kapitel haben wir die Langzeitverteilung der Meinungsentwicklung angegeben und erwähnt, dass das Langzeitverhalten der Individuen in sehr großen Populationen bei geringem Gruppendruck nicht signifikant von einem rein zufälligen abweicht. Sind die Individuen allerdings sehr hohem Gruppendruck ausgesetzt, so ist genau ein zufälliges Charakteristikum (positiv oder negativ) korreliert mit der Entscheidung. Im letzten Kapitel haben wir kurz ein modifiziertes Modell vorgestellt, in dem der Aspekt der eingeschränkten Kommunikation integriert ist.
Außerdem ist zu erwähnen, dass wir, vorausgesetzt unser Modell ist realitätsnah, den Parameter für den Gruppendruck schätzen können, denn in der Realität sind alle anderen Parameter, inklusive der Entscheidungen, bekannt. Eine interessante Situation ergibt sich, wenn man die Individuen nach der Ausprägung einer Charakteristik fragt. Man kann zeigen, dass, wenn M schnell genug mit N wächst, es immer „verwirrte” Individuen gibt, die entgegen ihrer eigentlichen Eigenschaft antworten.

[8] Damit die Funktion H_N^{komm} von derselben Größenordnung wie H_N ist, teilen wir zusätzlich durch p.

Literatur

[1] Hopfield, J.J.: Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **79** (1982)

[2] Knöpfel, H. & Löwe, M.: Zur Meinungsbildung in einer heterogenen Bevölkerung – ein neuer Zugang zum Hopfield Modell (2009)

[3] http://www.mineralienatlas.de/lexikon/index.php/amorph

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
n	Zeitpunkt
N	Anzahl der befragten Individuen (Populationsgröße)
M	Anzahl der Charakteristika
$\xi_i = (\xi_i^1, ..., \xi_i^M)$	i-tes Individuum mit zugehörigen Eigenschaften
$\sigma_i(n)$	Entscheidung des i-ten Individuums zum Zeitpunkt n
$\sigma(n)$	Meinungsbild zum Zeitpunkt n
$s = (s_1, .., s_N) \in S = \{+1, -1\}^N$	Meinungsbild aus dem Zustandsraum (=Menge aller möglichen Meinungsbilder)
$h_i(s) = \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} J_{i,j} \cdot s_j$	Individuell gewichtete Gesamtmeinung des i-ten Individuums
$J_{i,j} = \sum\limits_{\mu=1}^{M} \xi_i^\mu \cdot \xi_j^\mu = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$	Gewichte; Einfluss des j-ten Individuums auf das i-te
$\beta > 0$	Gruppendruck
$\mathbb{P}\left(\sigma_i(n) = \pm 1\right) = \dfrac{e^{\pm \beta h_i(\sigma(n-1))}}{e^{\beta h_i(\sigma(n-1))} + e^{-\beta h_i(\sigma(n-1))}}$	Übergangswahrscheinlichkeit für die Entscheidung des i-ten Individuums
$Q_n(r,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{s_i \cdot \beta \cdot h_i(r)}}{e^{\beta \cdot h_i(r)} + e^{-\beta \cdot h_i(r)}} & \text{falls } r_j = s_j \ \forall\ j \neq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	Übergangsmatrix
$\mu_{\beta,N}(s) = \dfrac{\exp\left(\beta H_N(s)\right)}{Z_N(\beta)}$	Gleichgewichtsmaß
$Z_N(\beta) = \sum\limits_{s \in S} \exp(\beta H_N(s))$	normierende Konstante
$H_N(s) = \frac{1}{2N} \sum\limits_{i,j=1}^{N} \sum\limits_{\mu=1}^{M} \xi_i^\mu \xi_j^\mu s_i s_j$	Energiefunktion
$\varepsilon_{i,j} = 1$ bzw. $\varepsilon_{i,j} = 0$	i-tes und j-tes Individuum kommunizieren miteinander bzw. kommunizieren nicht