Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Seminararbeit

Thema:

Diskrete Wahl in sozialen Interaktionen

Betreuer: Prof. Löwe
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik

Westfälische-Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von:

Veronika Beier

Matrikelnummer: 364258

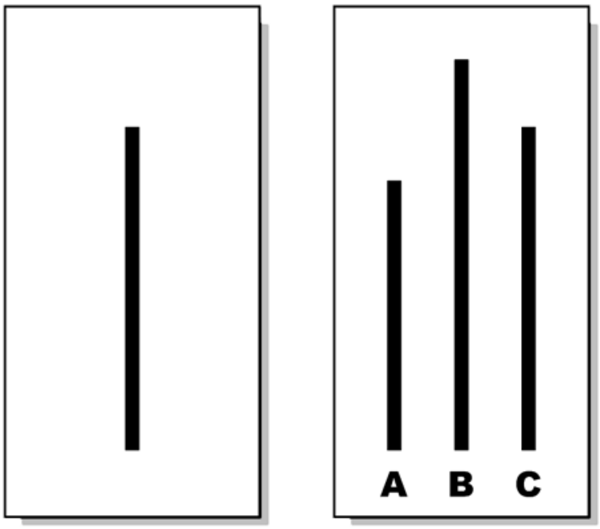
11. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Beispiel 1[1]

Salamon Asch[1] *führte 1951 folgendes Experiment durch. Es saßen eine Gruppe von Personen an einem Konferenztisch. Der Versuchsperson, die diesen Raum betrat, wurde gesagt, es handle sich um andere freiwillige Teilnehmer an dem Experiment. In Wahrheit waren jedoch alle Anwesenden außer der Versuchsperson Vertraute des Versuchsleiters. Auf einem Bildschirm vor dieser Gruppe wurde eine Linie dargeboten. Neben dieser Referenzlinie wurden drei weitere Linien eingeblendet und es war die Aufgabe der Personen, einzuschätzen, welche dieser drei Vergleichslinien gleich lang wie die Referenzlinie war.*



In der Kontrollgruppe sollten die Vertrauten des Versuchsleiters ihre wahre Einschätzung in der Gruppe äußern. Hier machte die Versuchsperson kaum Fehler (unter 1 %).
In der Experimentalgruppe fanden ebenfalls Schätzungen statt. Während sechs dieser Durchgänge waren die heimlichen Vertrauten instruiert, ein richtiges Urteil abzugeben (um glaubhaft zu erscheinen). Während der verbliebenen zwölf Durchgänge (zufällig unter die sechs richtigen gemischt) sollten die Vertrauten einstimmig ein falsches Urteil abgeben. Bei etwa einem Drittel der Fälle passten sich die Teilnehmer der Mehrheit an (trotz offensichtlicher Fehlentscheidung).

Warum hat die Versuchsperson sich der Mehrheit angeschlossen, obwohl ihr bewusst war, dass die Meinung der anderen Teilnehmer falsch war?

[1]Solomon Asch (* 14. September 1907 in Warschau; † 20. Februar 1996) war ein polnisch-amerikanischer Gestaltpsychologe und Sozialpsychologe.

Dies lässt sich wie folgt erklären: Zunächst einmal erzielt die Testperson keinen direkten Nutzen daraus, dass er eine richtige oder falsche Antwort gibt. Ihm ist es zunächst erst einmal gleichgültig, ob seine Antwort stimmt oder nicht. Lediglich der Wunsch der Zugehörigkeit zur Gruppe ist der Grund für das konforme Verhalten der Testperson. Die Testperson möchte nicht von der Gruppennorm abweichen, um nicht aufzufallen und passt sich somit der Mehrheit an. Das bedeutet, dass ihm gleiches Verhalten einen positiven Effekt stiftet. Ungleiches Verhalten dementsprechend einen Negativen.

Dies ist ein Beispiel für eine soziale Interaktion. Unter einer sozialer Interaktion versteht man im Allgemeinen "das wechselseitige Aufeinanderwirken zwischen Individuen zum Zwecke der Abstimmung des Verhaltens der Beteiligten bzw. des konkreten Handelns der Kooperationspartner. Es ist die über psychische Tätigkeit wechselseitige Beeinflussung von Individuen innerhalb einer Gruppe" ([3], S. 259).

Im obigen Beispiel ist das soziale Umfeld der Testperson ein wichtiger Einflussfaktor für die Entscheidung. Die Testperson wird durch das Verhalten der Mitmenschen, gelenkt und beeinflusst in dem eigenen Handeln.
Meine Seminararbeit soll sich damit beschäftigen, wie ein Individuum sich bei einer Entscheidung durch andere Menschen aus seinem Umfeld beeinflussen lässt. Das Ziel ist es die Wahl eines Individuums in einem mathematischen Entscheidungsprozess zu modellieren, wobei unter Anderem das Verhalten der Mitmenschen mit einfließt.
Im ersten Teil des Seminarvortrags wird es darum gehen zunächst eine Nutzenfunktion für eine Entscheidung aufzustellen. Diese Nutzenfunktion muss einige Annahmen erfüllen, damit das Modell auch sinnvoll ist. Im zweiten Teil können wir dann mit Hilfe der zuvor getroffenen Annahmen die Wahrscheinlichkeit und den Erwartungswert der Entscheidung angeben. Zudem können wir ein Gleichgewicht für den Fall bestimmten, dass sich die Gruppe nichtkooperativ verhält. Zu guter Letzt wollen wir das Gleichgewicht auf einige Eigenschaften hin überprüfen. Wir werden Antworten auf die Fragen: "Ist das Gleichgewicht stabil?" und "In welchem Gleichgewicht ist der Nutzen maximal?" erhalten.

2 Individueller Nutzen in sozialen Interaktionen

2.1 Modellierung des individuellen Nutzens in diskreter Wahl

Zunächst modellieren wir das Problem der individuellen Wahl in sozialen Interaktionen mathematisch. Es sei hierzu eine Gruppe gegeben mit I Personen, wobei wir annehmen, dass $I \geq 2$ ist. Unter einer Gruppe kann man dabei eine Zusammenfassung von Personen verstehen, die in einer unmittelbaren Beziehung zueinander stehen und zwischen denen Interaktionen statt finden. Das bedeutet, dass sich die Gruppenmitglieder gegenseitig beeinflussen in ihrem Handeln und Denken. Beispiele für eine solche Gruppe können eine Schulklasse, ein Turnverein, eine Familie oder eine Nachbarschaft sein.
Jeder Teilnehmer einer Gruppe muss nun zeitgleich eine binäre Entscheidung treffen. In Beispiel eins hatte die Testperson die Wahl zwischen: "Ich schließe mich der Mehrheit an, obwohl die Antwort offensichtlich falsch ist" und "Ich sage die richtige Antwort und widerspreche damit den Anderen". Die Entscheidung des i-ten Teilnehmers wird dabei mit ω_i bezeichnet und kann die Werte 1 und -1 annehmen. Die Wahl der einzelnen Gruppenmitglieder ist hierbei stochastisch.

$$\omega_i : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\{-1,1\}, \mathcal{P}(\{-1,1\})) \qquad \forall i \in \{1,..,I\}$$

(Mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}$ dieser Zufallsvariablen beschäftigen wir uns im nachfolgenden Kapitel.)

Trifft ein Gruppenmitglied (die i-te Person) eine Entscheidung, so erhält er hierfür einen individuellen Nutzen, der abhängig ist von der getroffenen Wahl ω_i. Dieser individuelle Nutzen V_{ω_i} besteht aus drei Teilen: dem privaten Nutzen u, dem sozialen Nutzen S und einem zufälligen Fehlerterm ε_{ω_i}.
Der zufällige Fehlerterm ε_{ω_i} hat den selben Grundraum wie die Entscheidungszufallsvariable ω_i und ist somit eine Zufallsvariable der Form

$$\varepsilon_{\omega_i} : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \qquad \forall i \in \{1,..,I\}.$$

Der Grund für den gemeinsamen Grundraum Ω ist, dass ein Szenario der Grundmenge uns sowohl die Wahl -1 oder 1 als auch den Wert des Fehlerterms liefert. Damit die Messbarkeit der beiden Zufallsvariablen erfüllt ist, müssen wir für die σ-Algebra fordern, dass

$$\mathcal{A} := \sigma(\varepsilon_{\omega_i}, \omega_i) = \sigma\left(\{\varepsilon_{\omega_i}^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\} \cup \{{\omega_i}^{-1}(C) | C \in \mathcal{P}(\{-1,1\})\}\right)$$

gilt. Der Nutzen der individuellen Wahl der i-ten Person wird nun als Summe aus sozialen und privaten Nutzen sowie dem Fehlerterm definiert:

$$V_{\omega_i} = u(\omega_i) + S(\omega_i, \overline{m}_i, J) + \varepsilon_{\omega_i} \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad \overline{m}_i = \frac{1}{(I-1)} \sum_{i \neq j} m_{i,j} \in [0,1].$$

Hierbei beschreibt $m_{i,j}$ den erwarteten Wert der Wahl des j-ten Gruppenmitglieds aus Sicht des i-ten Gruppenmitglieds. Das bedeutet $\overline{m}_i$ ist die durchschnittlich zu erwartende Wahl der anderen Gruppenmitglieder bezogen auf die Einschätzung des i-ten Gruppenmitglieds.
Weiterhin wollen wir annehmen, dass sich jedes Mitglied der Gruppe rational verhält. Es wird sich also für -1 entscheiden, falls der individuelle Nutzen für die Wahl von -1 größer ist als der Nutzen bei der Wahl von 1. Das bedeutet

$$\omega_i = -1 \Longleftrightarrow V_{-1} > V_1 \quad \text{und} \quad \omega_i = 1 \Longleftrightarrow V_{-1} < V_1. \tag{2}$$

2.2 Annahmen der Nutzenparametern

Zunächst werden wir ein paar Annahmen an unser Modell stellen um es sinnvoll zu gestalten.

2.2.1 Privater Nutzen

Der private Nutzen, bedingt durch eine Entscheidung, ist der Nutzen, den das Individuum direkt aus einer Entscheidung erhält.

Da es sich in unserem Modell stets um eine binäre Entscheidung handelt, werden wir im weiteren Verlauf $u(\omega_i)$ durch $h \cdot \omega_i + k$ ersetzen mit $h, k \in \mathbb{R}$. Der Einfachheit halber werden wir annehmen, dass die Konstanten h und k unabhängig von den Gruppenmitgliedern sind. Das bedeutet, dass der private Nutzen bei gleicher Entscheidung für alle Gruppenmitglieder identisch ist.
Ist $h > 0\,(h < 0)$ so wird uns die Entscheidung für $\omega_i = 1 (\omega_i = -1)$ einen höheren privaten Nutzen stiften, als wenn wir uns für das Gegenteil entscheiden. Ist h=0, so spielt der private Nutzen keine Rolle bei der Wahl der Entscheidung. In Beispiel eins haben wir diesen Fall. Die Testperson erzielt keinen Nutzen daraus, dass sie sich für die richtige Lösung entscheidet. Lediglich der soziale Nutzen, in Form vom Wunsch der Zugehörigkeit zur Gruppe, bestimmt die Entscheidung der Testperson.[2]

2.2.2 Sozialer Nutzen

Der soziale Nutzen, der aus einer Entscheidung resultiert, ist der Nutzen, den ein Individuum erhält, wenn er sich symmetrisch oder asymmetrisch zur Gruppennorm verhält. Passt ein Individuum seine Entscheidung der Gruppennorm an, so erhält er dafür ein positives Feedback in Form von Zugehörigkeitsgefühlen. Wir werden in unserem Modell annehmen, dass der soziale Nutzen der i-ten Person von drei Parametern abhängt: der eigenen Wahl ω_i, der erwarteten Wahl der anderen Teilnehmer $\overline{m}_i$ und von einer positiven Konstante J.[3]
Die Konstante J ist ein Parameter, der die Abhängigkeit zwischen den Gruppenmitgliedern angibt. Je größer die Konstante ist, desto mehr wird ein Gruppenmitglied dazu neigen, sich den

[2] Der Fehlerterm kann hier vernachlässigt werden, da es keine Unsicherheiten gibt.

[3] Wäre die Konstante gleich null, so spricht man von Individualismus oder auch Nonkonformismus. In diesem Fall streben die Individuen an, sich in ihren Entscheidungen nicht durch Andere beeinflussen zu lassen, sondern diese eigenständig zu treffen.

anderen Mitgliedern durch konformes Verhalten anzupassen. Von konformen Verhalten spricht man im Allgemeinen, wenn ein Individuum seine Normvorstellungen und sein Verhalten den anderen Menschen in der Gruppe anpasst.
Die Größe der Konstanten J kann durch drei Faktoren beeinflusst werden. Erstens ist die Größe der Gruppe entscheidend. Je größer die Gruppe ist, desto stärker ist tendenziell der äußere Konformitätsdruck. Besteht im einführenden ersten Beispiel die Testgruppe nur aus drei Personen, so wird die Testperson sich eher gegen die einheitlich falsche Meinung zweier anderer Gruppenmitglieder entscheiden und auf die richtige Lösung tippen, als wenn die Gruppe aus 100 Personen besteht.
Zweitens spielen die Gruppenmitglieder eine wichtige Rolle. Sind der betroffenen Person die Gruppenmitglieder wichtig oder wird er durch sie dominiert, so nimmt der Wunsch der Zugehörigkeit zu.
Der dritte Faktor ist die räumliche und zeitliche Nähe der Anderen. Je größer die Nähe ist, desto stärker ist der Wunsch sich symmetrisch zu verhalten. Im Folgenden werden wir zwei soziale Nutzenfunktionen vorstellen, die mit den vorherigen Überlegungen übereinstimmen.

Sozialer Nutzen mit proportionalem Effekt

Von einem proportionalen Effekt spricht man, wenn zwischen der individuellen und der erwarteten Wahl ein multiples Verhältnis besteht. Die soziale Nutzenfunktion ist in diesem Fall definiert als

$$S(\omega_i, \overline{m}_i, J) = J\omega_i\overline{m}_i. \tag{3}$$

Da nach Voraussetzung J> 0 ist, also ein Konformes Verhalten der Gruppenmitglieder unterstellt wird, ist der soziale Nutzen im proportionalen Effekt Fall genau dann positiv, wenn die individuelle Wahl ω_i das gleiche Vorzeichen hat wie die erwartete Wahl der anderen Gruppenmitglieder $\overline{m}_i$. Im Fall des proportionalen Effektes können sowohl positive als auch negative Nutzen resultieren. Konformes Verhalten wird dabei stets mit positiven Nutzen belohnt.

Sozialer Nutzen mit rein konformem Effekt

Die zweite Möglichkeit einer Funktion, die den sozialen Nutzens wiedergibt, ist der rein konforme Effekt. Hierbei ist der soziale Nutzen von der Form

$$S(\omega_i, \overline{m}_i, J) = -\frac{J}{2}(\omega_i - \overline{m}_i)^2 \tag{4}$$

Dieser Nutzen ist stets negativ. Verhält sich das Gruppenmitglied konform, so ist der soziale Nutzen lediglich weniger negativ.

Vergleicht man die beiden sozialen Nutzenfunktionen (3) und (4), so stellt man fest, dass im Fall des rein konformen Effektes eine Abweichung von der Gruppennorm stärker berücksichtigt

wird. Das bedeutet, ein Individuum, welches sich konform (nichtkonform) verhält, wir bei rein konformen Effekten stärker mit Nutzen "belohnt" (bestraft) als im Fall von sozialen Nutzen mit proportionalen Effekten. Eine Gemeinsamkeit der beiden sozialen Nutzenfunktionen ist, dass der Nutzen jeweils in einem proportionalen Verhältnis zu der Konstanten J steht.
Im weiteren Verlauf des Seminares werden wir immer von sozialen Nutzen mit proportionalen Effekten ausgehen.

2.2.3 Fehlerterm

Der Fehlerterm ε ist eine Zufallsgröße, die die Nutzenzu- bzw. abnahme einer Wahl bedingt durch verschiedene Arten von stochastischen Einflüssen wiedergibt. Diese äußeren Einflüsse können zum Beispiel unbeobachtete Einflussgrößen, unbeobachtete Schwankungen in den Präferenzen der Gruppenmitglieder oder ungenaue Informationen sein. In unserem Eingangsbeispiel können wir davon ausgehen, dass es keine Unsicherheiten gibt und somit keinen Fehlerterm. Denn bedingt durch die vorangegangende Disskussionsrunde, weiß jedes Individuum wie sich die anderen Gruppenmitglieder entscheiden werden. Wir nehmen bei den Fehlertermen ε_{ω_i} bezüglich der Wahl ω_i der i-ten Person an, dass diese unabhängig und identisch verteilt für alle Gruppenmitglieder und für die beiden Wahlmöglichkeiten sind. Das bedeutet

$$\varepsilon =: \varepsilon_{\omega_i} \qquad \forall \omega_i \in \{-1, 1\} \quad \forall i \in \{1, ..., I\}.$$

Des Weiteren wollen wir davon ausgehen, dass die Existenz der stochastische Störgröße sowie deren Verteilung dem i-ten Individuum zur Zeit der Wahl bekannt ist.
Hierbei wollen wir annehmen, dass die Fehlerterme Extremwertverteilt sind. Genauer gesagt, sollen die Fehlerterme Gumbel-verteilt sein. Bei der Gumbel-Verteilung handelt es sich um eine spezielle Art der Extremwertverteilung. Diese stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung findet Anwendung in den Gebieten, in denen wir uns für zu erwartende höchste Messwerte in einem bestimmten Zeitraum interessieren. Die Dichtefunktion einer Gumbel-Verteilung, also die Verteilung unserer Fehlerterme lautet:

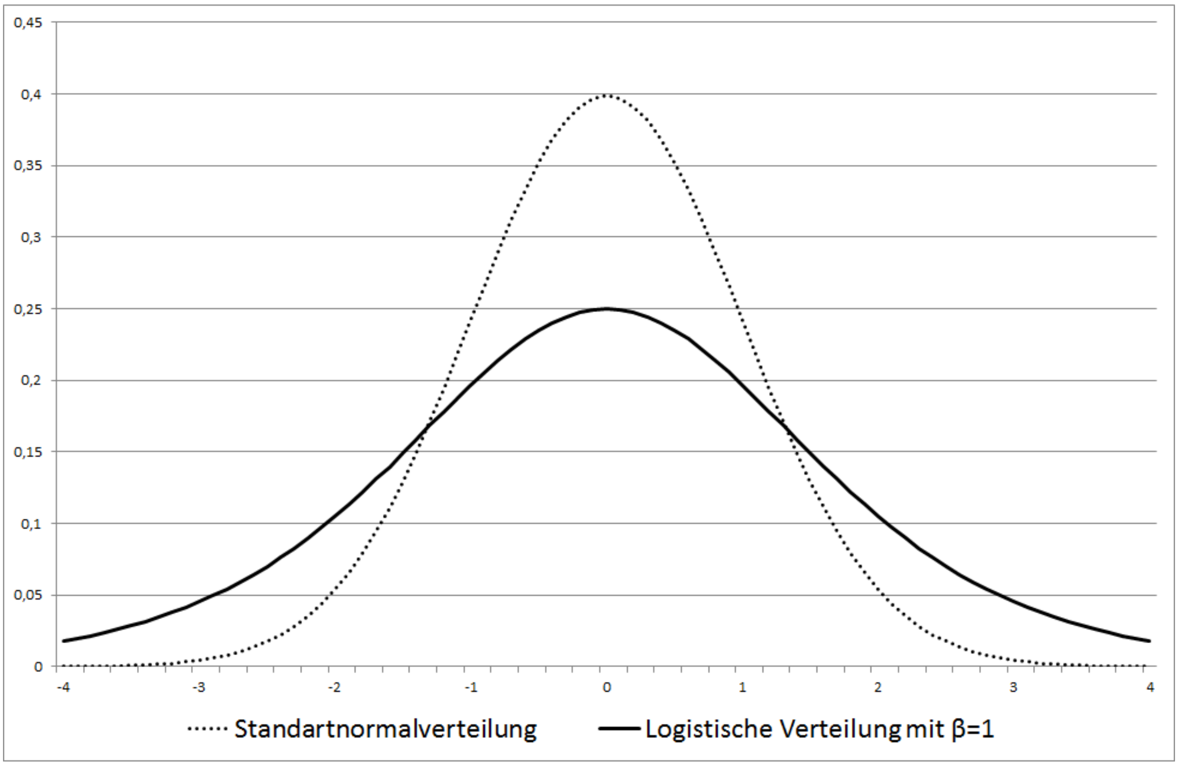
$$f_\varepsilon(x) = \beta \exp(-\beta x) \exp(-\exp(-\beta x)) \qquad \beta > 0.$$

Die Tatsache, dass die Störgrößenverteilungen für jedes Gruppenmitglied zur Zeit der Wahl bekannt ist, zusammen mit der Tatsache, dass die Zufallsgrößen der beiden Alternativen $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1$ unabhängig und identisch verteilt sind, hat zur Folge, dass die Fehlerterme großen Einfluss auf die binäre Wahl der Gruppenmitglieder haben (vgl. Bemerkung 2). Nach (2) entscheiden wir uns genau dann für die eine Alternative und gegen die Andere, wenn der Nutzen hierfür größer ist. Der stochastische Fehlerterm ist ein Teil dieses Nutzens. Um einen Nutzenvergleich zwischen den Alternativen herstellen zu können, interessieren wir uns also besonders für die Differenz der Störgrößen der beiden Alternativen.
Aus der identischen Gumbel-Verteilung von $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1$ und der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen folgt, dass die Differenz dieser zwei Störgrößen logistisch verteilt ist für alle Personen einer Gruppe. Somit ergeben sich folgende Dichte- und Verteilungsfunktion für die Differenzgröße

$(\varepsilon_{-1} - \varepsilon_1)$:

$$\begin{aligned} f_{(\varepsilon_{-1}-\varepsilon_1)}(x) &= \frac{\beta \exp(-\beta x)}{(1+\exp(-\beta x))^2} \\ F_{(\varepsilon_{-1}-\varepsilon_1)}(t) &= \frac{1}{1+\exp(-\beta t)} \end{aligned} \tag{5}$$

mit $\beta > 0$. Die logistische Verteilung ist ähnlich zur Standartnormalverteilung (bei entsprechender Wahl des Parameters β). Die stetigen Wahrscheinlichkeitsdichten sind beide symmetrisch zum Nullpunkt. Allerdings ist die logistische Dichte schmaler im Zentrum und nimmt höhere Werte an. An den Enden nimmt die logistische Dichte langsamer ab als die Normalverteilung. Der Vorteil der logistischen Verteilung ist die Verteilungsfunktion. Diese ist im Vergleich zur Normalverteilung ein geschlossener Ausdruck und kann im Gegensatz zum Integralausdruck bei der Normalverteilung leichter berechnet werden.



3 Wahrscheinlichkeiten der Wahlen bei nichtkooperativem Verhalten der Gruppenteilnehmer

Nachdem wir nun einige Voraussetzungen an unser Entscheidungsmodell gestellt haben, können wir nun im nächsten Schritt die Wahrscheinlichkeit dafür ausrechnen, dass sich ein Individuum für 1 bzw. -1 entscheidet. Bei diesem Entscheidungsvorgang gehen wir davon aus, dass sich die Gruppe nichtkooperativ verhält. Unter nichtkooperativen Verhalten versteht man, dass die Gruppenmitglieder nicht mit einander kommunizieren und ihre Wahlen nicht koordinieren. Somit trifft jedes Individuum seine Entscheidung eigenständig und unabhängig von den Anderen. Jedoch beeinflusst die erwartende Entscheidung der anderen Gruppenmitgliedern ihre eigene Wahl.

Satz 1.
Verhält sich eine Gruppe nichtkooperativ und weist der soziale Nutzen proportionale Effekte auf, so ist die Wahrscheinlichkeit der diskreten Wahl gegeben durch

$$\mathbb{P}(\omega_i = \pm 1) = \frac{\exp(\beta N_i(\pm 1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))} \tag{6}$$

wobei $N_i(\pm 1) := u(\pm 1) + J \cdot (\pm 1)\overline{m}_i$ die Summe des privaten und sozialen Nutzen bezeichnet.

Beweis:
Da sich nach Voraussetzung jedes Individuum rational verhält, wird sich ein Individuum genau dann für 1 entscheiden, wenn der Nutzen für die Wahl von 1 fast sicher größer ist als der Nutzen für die Wahl von -1 (siehe(2)). Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\omega_i = 1) &= \mathbb{P}(V_{\omega_i=1} > V_{\omega_i=-1}) \\
&= \mathbb{P}(N_i(1) + \varepsilon_1 > N_i(-1) + \varepsilon_{-1}) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_{-1} - \varepsilon_1 < N_i(1) - N_i(-1)) \\
&= \frac{1}{1 + \exp(-\beta(N_i(1) - N_i(-1)))} \\
&= \frac{\exp(\beta N_i(1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))}
\end{aligned}$$

Wobei wir im zweiten Umformungsschritt die Logistische Verteilungsfunktion (5) der Differenz der Fehler benutzt haben. Mit

$$\mathbb{P}(\omega_i = -1) = 1 - \mathbb{P}(\omega_i = 1) = \frac{\exp(\beta N_i(-1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))}$$

folgt die Behauptung.

□

Bemerkung 2.
Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der Wahl von der logistischen Verteilung der Fehlerdifferenzen, machen wir eine Grenzwertbetrachtung des Parameters $\beta > 0$.

Fall 1: $\beta \longrightarrow 0$
Dann gilt für die Grenzwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \longrightarrow 0} \quad \mathbb{P}(\omega_i = 1) &= \lim_{\beta \longrightarrow 0} \quad \frac{\exp(\beta N_i(1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1)))} \\ &= \lim_{\beta \longrightarrow 0} \quad \frac{1}{1 + \exp(\beta(N_i(-1) - N_i(1)))} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass wir uns mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für -1 beziehungsweise 1 entscheiden und das unabhängig davon, wie der soziale und private Nutzen der einzelnen Entscheidung ausfällt. Die Begründung dieser gleichen Wahrscheinlichkeit liegt darin, dass der Nutzen aus dem Fehlerterm unendlich groß wird, somit ändert auch der soziale und private Nutzen nichts daran.[4] Das Individuum ist also indifferent in der Entscheidung, ob er -1 oder 1 wählt. Er erhält in beiden Fällen unendlichen Nutzen.

Fall 2: $\beta \longrightarrow \infty$
Dann gilt:

$$\lim_{\beta \longrightarrow \infty} \mathbb{P}(1) = \lim_{\beta \longrightarrow \infty} \frac{1}{1 + \exp(\beta(N_i(-1) - N_i(1)))} = \begin{cases} 1 & \text{falls } N_i(-1) < N_i(1) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } N_i(-1) = N_i(1) \\ 0 & \text{falls } N_i(-1) > N_i(1). \end{cases}$$

Im zweiten Fall dagegen verschwindet der Einfluss des Fehlerterms. Das bedeutet, dass nur noch der soziale und private Nutzen zur Wahlentscheidung beiträgt, der Fehlerterm spielt keine Rolle mehr.

[4] Der Erwartungswert einer Gumbel-verteilten Zufallsvariablen zum Parameter $\mu = 0$ und β ist $\frac{1}{\beta} \cdot \gamma$, wobei $\gamma \approx 0{,}5772$ die Euler-Maseroni- Konstante ist.

4 Gleichgewicht der Wahlen bei nichtkooperativen Verhalten der Gruppenteilnehmer

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsgewichte in Satz 2 und der Definition des privaten Nutzens $u(\omega_i) = h\omega_i + k$ können wir den Erwartungswert der Wahl der i-ten Person bestimmen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\omega_i] &= 1 \cdot \mathbb{P}(\omega_i = 1) - 1 \cdot \mathbb{P}(\omega_i = -1) \\
&= \frac{\exp(\beta N_i(1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))} - \frac{\exp(\beta N_i(-1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))} \\
&= \frac{\exp(\beta N_i(1)) - \exp(\beta N_i(-1))}{\exp(\beta N_i(1)) + \exp(\beta N_i(-1))} \\
&= \frac{\exp(\beta(u(1) + J\overline{m}_i)) - \exp(\beta(u(-1) - J\overline{m}_i))}{\exp(\beta(u(1) + J\overline{m}_i)) + \exp(\beta(u(-1) - J\overline{m}_i))} \\
&= \frac{\exp(\beta(h + k + J\overline{m}_i)) - \exp(\beta(-h + k - J\overline{m}_i))}{\exp(\beta(h + k + J\overline{m}_i)) + \exp(\beta(-h + k - J\overline{m}_i))} \\
&= \frac{\exp(\beta(h + J\overline{m}_i)) - \exp(\beta(-h - J\overline{m}_i))}{\exp(\beta(h + J\overline{m}_i)) + \exp(\beta(-h - J\overline{m}_i))} \\
&= \tanh(\beta h + \beta J\overline{m}_i)
\end{aligned}$$

Wir stellen also fest, dass der Erwartungswert der Entscheidung der i-ten Person von den individuellen Einschätzungen der i-ten Person zu den Entscheidungen der j-ten Person abhängen. Wollen wir diese Abhängigkeit umgehen, so verwenden wir rationale Erwartungswerte.

Definition 3.
Wir nennen die Erwartungswerte für Gruppenmitglieder rational, wenn

$$m_{i,j} = \mathbb{E}[\omega_j] \quad \forall i \in \{1, .., I\} \tag{7}$$

gilt.

Frage: Was bedeuten rationale Erwartungswerte?
Unter rationalen Erwartungswerten versteht man, dass jede Person den gleichen und auch richtigen Erwartungswert bzgl. der Wahl einer bestimmten Person hat. Dies bedeutet soviel, wie, dass alle Individuen eine Person aus der Gruppe gleich einschätzen und sie gleich viele Informationen über diese Person haben. Wir können den vorhin berechneten Erwartungswert umschreiben zu

$$\mathbb{E}[\omega_i] = \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\omega_j]).$$

Proposition 4.
Unter der Annahme, dass die Erwartungswerte rational sind, existiert mindestens ein in sich konsistentes Gleichgewicht für diskrete Wahlen bei nichtkooperativen Verhalten der Gruppe. Es existiert also ein $m^* \in (-1,1)$ mit

$$m^* = \mathbb{E}[\omega_i] = \tanh(\beta h + \beta J m^*) \quad \forall i \in \{1,..,I\} \tag{8}$$

Beweis:
Zum Beweis benutzen wir den Brouwers Fixpunktsatz. Zur Erinnerung:

Sei $K^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \quad ||x|| \leq 1\}$ die n-dimensionale Einheitskugel.
Dann besitzt jede stetige Selbstabbildung von K^n in sich selbst mindestens einen Fixpunkt.

Betrachte die Funktion :

$$\begin{aligned} f:(-1,1)^I &\longrightarrow (-1,1)^I \\ (\mathbb{E}[\omega_1],..,\mathbb{E}[\omega_I]) &\longmapsto \left(\tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq 1}\mathbb{E}[\omega_j]),...,\tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq I}\mathbb{E}[\omega_j])\right). \end{aligned}$$

Diese Funktion erfüllt die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Brouwer, denn diese Funktion ist stetig (da tanh stetig ist und komponentenweise Stetigkeit, die Stetigkeit der ganzen Funktion impliziert) und es handelt sich um eine Selbstabbildung von $(-1,1)^I$ nach $(-1,1)^I$ (da $\mathbb{E}[\omega_i] \in (-1,1)$ und $\tanh : \mathbb{R} \to (-1,1)$). Somit ist die Existenz eines Gleichgewichtsvektors gesichert. Das bedeutet, es gilt:

$$\mathbb{E}[\omega_i] = \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq i}\mathbb{E}[\omega_j]) \quad \forall i \in \{1,..,I\}. \tag{9}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{E}[\omega_i] = \mathbb{E}[\omega_j]$ für jedes Gruppenmitglied $i \in \{1,...,I\}$ gilt.
Angenommen dies gilt nicht, dann existieren $i_1, i_2 \in \{1,...,I\}$ mit $i_1 \neq i_2$ sodass $\mathbb{E}[\omega_{i_1}] < \mathbb{E}[\omega_{i_2}]$ gilt. Dann können wir mit (9) schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\omega_{i_1}] &= \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq i_1}\mathbb{E}[\omega_j]) \\ &= \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}(\sum_{j\neq i_2}\mathbb{E}[\omega_j] + \mathbb{E}[\omega_{i_2}] - \mathbb{E}[\omega_{i_1}])) \\ &= \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq i_2}\mathbb{E}[\omega_j] + \underbrace{\beta J(I-1)^{-1}(\mathbb{E}[\omega_{i_2}] - \mathbb{E}[\omega_{i_1}])}_{>0 \text{ nach Voraussetzung}}) \\ &> \tanh(\beta h + \beta J(I-1)^{-1}\sum_{j\neq i_2}\mathbb{E}[\omega_j]) \\ &= \mathbb{E}[\omega_{i_2}] \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Funktion tanh streng monoton wachsend ist. Diese Abschätzung liefert uns einen Widerspruch zur Annahme und wir erhalten die Gleichheit aller Erwartungswerte. Es existiert also ein $m^* \in (-1,1)$ mit $m^* = \mathbb{E}[\omega_i] = \tanh(\beta h + \beta J m^*) \quad \forall i \in \{1,..,I\}$.

□

Frage: Wie ist ein Gleichgewicht zu verstehen?
Der Ausdruck (9) macht deutlich, dass der Erwartungswert der Wahl der i-ten Person von den rationalen Erwartungswerten der Wahl der anderen Personen abhängt. Umgekehrt beeinflusst aber auch der Erwartungswert der Wahl der i-ten Person den Erwartungswert der Wahl der anderen Personen der Gruppe. Es bestehen also wechselseitige Verflechtungen. Der linke Teil der Gleichung besagt auf Grund der rationalen Erwartungswerte, dass die anderen Gruppenteilnehmer von Individuum i die Antwort "$\mathbb{E}[\omega_i]$" erwarten. Individuum i allerdings rechnet mit dem rechten Teil. Dies ist sein berechneter Erwartungswert. Dieser ist abhängig von den rationalen Erwartungswerten der anderen Gruppenteilnehmer. Das Gleichungssystem kann nur gelöst werden, wenn die Gleichheit von den individuellen Einschätzungen und den Erwartungen der anderen Gruppenteilnehmern übereinstimmt und dies muss jeweils für alle Individuuen gelten. Es handelt sich also um ein nichtlineares Gleichungssystem mit I Unbekannten $\mathbb{E}[\omega_i]$ und I Gleichungen in Form von (9). Im Gleichgewicht haben wir einen Vektor gefunden, der genau (9) für jedes Gruppenmitglied erfüllt. Das bedeutet wir haben eine Lösung gefunden, für die es möglich ist, dass es rationale Erwartungswerte gibt und unsere vorherigen Modellannahmen Sinn machen. Insbesondere gilt in diesem Gleichgewicht, dass nun die Erwartungswerte jeder Person gleich sind. Dies kann man sich so vorstellen, dass die Gruppe vollständig homogen ist.

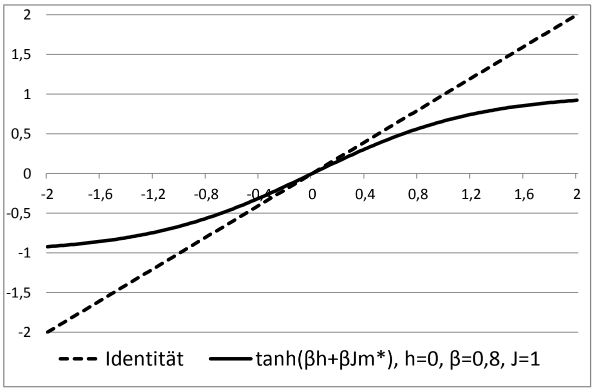
Frage: Wie verändern rationale Erwartungswerte unser vorheriges Modell?
Gehen wir davon aus, dass die rationalen Erwartungswerte $\mathbb{E}[\omega_i] = m^*$ für alle Individuuen i erfüllen, so ist $\overline{m}_i = m^*$ für alle Individuuen. Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für ω_i unabhängig und identisch verteilt sind. Folglich sind die Wahlen der Gruppenmitglieder unabhängig und identisch Bernoulli verteilt.

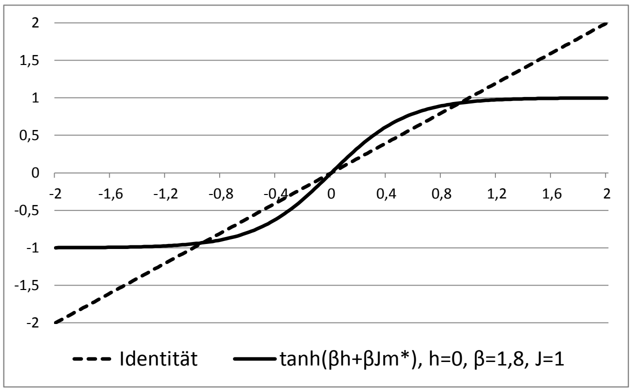
Wir haben nun also die Existenz mindestens eines Gleichgewichtes bewiesen. Lemma 5 liefert uns, dass es entweder ein oder drei Gleichgewichte gibt, wobei die Anzahl der Gleichgewichte von den Parametern β, J und h abhängt. Da wir mehrere Gleichgewichte erhalten können, wollen wir mit m^*_- ein Gleichgewicht bezeichnen, bei dem die meisten Gruppenmitglieder sich für -1 entscheiden. Entsprechend definieren wir m^*_+ als das Gleichgewicht, bei dem sich die meisten Gruppenmitglieder für 1 entscheiden. m^*_m soll das Gleichgewicht definieren, das zwischen diesen zwei Gleichgewichten liegt bzw. definiert es im Fall, in dem es nur ein Gleichgewicht gibt, das einzige Gleichgewicht.

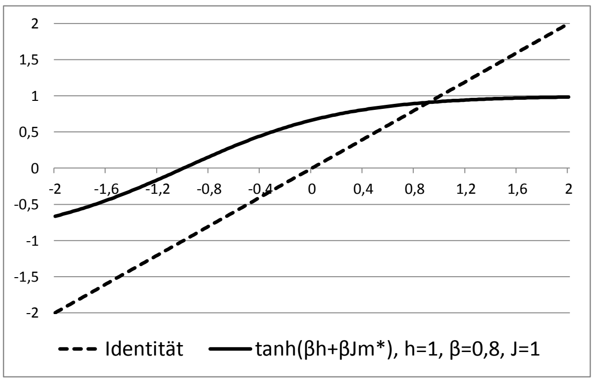
Lemma 5.

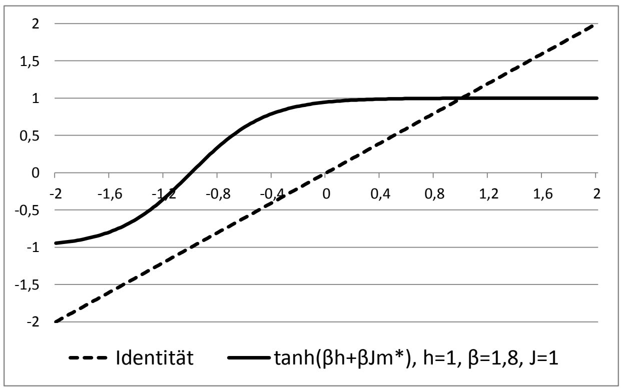
1. Falls $\beta J \leq 1$ und h=0, dann existiert eine Lösung $m_m^* = 0$ für (*).
2. Falls $\beta J \leq 1$ und $h \neq 0$, dann existiert eine Lösung m_m^* für (*) mit gleichem Vorzeichen wie der Parameter h.
3. Falls $\beta J > 1$ und $h = 0$, dann existieren drei Lösungen $m_m^* = 0, m_+^*$ und m_-^* für (*).
4. Falls $\beta J > 1$ und $h \neq 0$, dann existiert ein Schwellwert $M = M(\beta J)$, sodass
   (a) für $|\beta h| < M$ drei Gleichgewichte m_m^*, m_+^* und m_-^* für (*) existieren. Wobei nur eines der Gleichgewichte das gleiche Vorzeichen hat wie der Parameter h.
   (b) für $|\beta h| > M$ genau ein Gleichgewicht m_m^* für (*) existiert. Dieses Gleichgewicht hat das gleiche Vorzeichen wir der Parameter h.

Statt einen Beweis gibt es ein paar graphische Beispiele.









5 Quellenverzeichnis

Hauptquelle:
BROCK, W. und DURLAUF, S (2001) ”Discrete Choice with Social Interations”

Sonstige Quellen:
[1] WIKIPEDIA ”Das Konformitätsexperiment von Asch”
[2] National Center for education statistics, ”School statistics”
[3]CLAUSS, G. (1996), ”Wörterbuch der Pychologie”
[4]MORTENSEN, U. (2012) ”Wachstumsprozesse, interagierende Populationen, Epidemien, und die Messung psychischer Merkmale.”