Übungen zur Vorlesung Ausgewählte Kapitel der Finanzmathematik

Wintersemester 2012/13

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 1** **16.10.2012**

Aufgabe 1:

Geben Sie in einem Semimartingalmodell mit einem risky asset, dass positive stetige Pfade hat, eine Darstellung der Entwicklung des Preisprozesses als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung. Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt das numeraire asset?

Hinweis: Ein anloges Vorgehen wie bei einem Modell, dass von einem Wiener-Prozeß getrieben wird, führt zum Ziel.

Aufgabe 2:

Wir betrachten ein eindimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

für den Preisprozeß des risky assets und $\beta(t) = \exp(rt)$ für die Entwicklung des Geldmarktkontos. Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß in dem Fall, dass das risky asset als numeraire gewählt wird.

Aufgabe 3:

Wir betrachten ein zweidimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sigma_i dW_i(t)) \quad i = 1, 2$$

mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$. W_1, W_2 sind dabei zwei Wiener-Prozesse mit quadratischer Kovariation $< W_1, W_2 >_t = \rho t$ f.a. $t \geq 0$. Weiter ist ein Geldmarktkonto gegeben mit $\beta(t) = \exp(rt), 0 \leq t \leq T$ bei konstanter Zinsrate $r > 0$.

Bestimmen Sie in diesem Modell das zu S_1 gehörige äquivalente Martingalmaß. Dies ist ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_1^*$, so dass $\frac{S_2(t)}{S_1(t)}$ und $\frac{\beta(t)}{S_1(t)}$ Martingale sind bezüglich $\mathbb{P}_1^*$. Welche Dynamik erfüllen S_2, β_1 bezüglich $\mathbb{P}_1^*$

Besprechung: Am Dienstag, den 30.10.2012. 14.00-16.00 in SR2