WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Ein LDP für die Brownsche Bewegung

Der Satz von Schilder

Mirko Ebbers

04. Dez. 2010
Version vom 3. Dezember 2010

› Inhalt

Das Wiener Maß

Satz von Mogulskii
- Beweisstrategie
- direkte Folgerung

Satz von Schilder

› Inhalt

Das Wiener Maß

Satz von Mogulskii
- Beweisstrategie
- direkte Folgerung

Satz von Schilder

› Der CLT als Motivation

- $\mathcal{N}(\cdot,\cdot)$ als zentrales Objekt der Wahrscheinlichkeitstheorie
- Unter moderaten Regularitätsannahmen Grenzwert einer Transformation der Summe für Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$.

› Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

Definition

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von *i.i.d.* Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Dann heißt der Prozess

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

die symmetrische eindimensionale Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.

› Prozess im Funktionenraum

$$Y_n := \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} X_{\lfloor nt \rfloor + 1} \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{1}$$

- Y_n ist eine Zufallsvariable
- $Y_n \in \mathcal{C}([0,1])$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

Definition

Ein Maß μ auf $(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{B}_C)$ mit

- $\mu(\mathcal{C}([0,1])) = 1$
- $\mu \circ \pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}$ ist die m-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix

$$\left(min(t_i, t_j)\right)_{i,j}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

heißt Wiener Maß auf $(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{B}_C)$.

Definition

Es sei der Pfad $B_t \sim \mu$ gemäß μ verteilt. Dann gilt

- $\mu(B_t$ ist stetig in jedem $t) = 1$
- $\mu(B_t \leq \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{-s^2}{2t}} \, ds$
- Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1, \ldots, t_m \leq 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \leq \alpha_i\}\right) = \prod_{i=1}^{m} \mu\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right).$$

Eine Funktion B_t mit diesen Eigenschaften heißt eindimensionale Brownsche Bewegung (BM).

› Satz von Donsker

Satz

Es gibt genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ *auf* $(\mathcal{C}([0,1]), \mathcal{B}_C)$*, welches den Anforderungen an ein Wienermaß genügt.*

› Inhalt

Das Wiener Maß

Satz von Mogulskii
- Beweisstrategie
- direkte Folgerung

Satz von Schilder

Satz (von Mogulskii, 5.1.2)

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}^d$ mit

$$\Lambda(\lambda) := \log \mathbb{E} e^{\langle \lambda, X_1 \rangle} < \infty \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

Definiere dann

$$Z_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i \quad 0 \leq t \leq 1$$

und μ_n sei die Verteilung von Z_n auf $L_\infty([0,1])$. Dann erfüllen die $\{\mu_n\}$ ein LDP auf $L_\infty([0,1])$ mit guter Ratenfunktion

$$I(\varphi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\dot{\varphi}(t))\, dt & \text{falls } \varphi \in \mathcal{AC}, \varphi(0) = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma (5.1.4)

Es bezeichne $\tilde{\mu}_n$ die Verteilung von

$$\tilde{Z}_n(t) := Z_n(t) + \left(\frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{n} \right) X_{\lfloor nt \rfloor + 1}$$

auf $L_\infty([0,1])$. Die Wahrscheinlichkeitsmaße $\tilde{\mu}_n$ und μ_n sind exponentiell äquivalent auf $L_\infty([0,1])$.

Lemma (5.1.8)

Es bezeichne J die Menge aller endlich geordneten Indexmengen in $(0,1]$. Für $j = \{0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{|j|} \leq 1\} \in J$ und für $f : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ bezeichne

$$p_j(f) := \left(f(t_1), \ldots, f(t_{|j|})\right)$$

die Projektion.
Die Familie $\{\mu_n \circ p_j^{-1}\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen erfüllt ein LDP in $(\mathbb{R}^d)^{|j|}$ mit guter Ratenfunktion

$$I_j(z) = \sum_{l=1}^{|j|} (t_l - t_{l-1}) \Lambda^* \left(\frac{z_l - z_{l-1}}{t_l - t_{l-1}} \right).$$

Lemma (5.1.6)

$\mathcal{X}$ bezeichne den Funktionenraum

$$\mathcal{X} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}^d | f(0) = 0\}$$

versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann erfüllt die Familie $\{\tilde{\mu}_n\}$ ein LDP mit guter Ratenfunktion

$$I(\varphi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\dot{\varphi}(t))\, dt & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{AC}, \varphi(0) = 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Lemma (5.1.7)

Die Wahrscheinlichkeitsmaße $\tilde{\mu}_n$ sind exponentiell straff auf $(\mathcal{C}_0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Korollar

In der Situation vom Satz von Mogulskii sei ν_ε die Verteilung von

$$Y_\varepsilon(t) := \varepsilon \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon} \rfloor} X_i \quad 0 \le t \le 1.$$

Die Familie der Wahrscheinlichkeitsmaße $\{\nu_\varepsilon\}$ auf $L_\infty([0,1])$ erfüllt ein LDP mit guter Ratenfunktion

$$I(\varphi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\dot{\varphi}(t))\, dt & \textit{falls } \varphi \in \mathcal{AC}, \varphi(0) = 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

wissen.leben WWU Münster

› Inhalt

Das Wiener Maß

Satz von Mogulskii

Beweisstrategie

direkte Folgerung

Satz von Schilder

Satz (von Schilder)

Es sei $\{\omega_t\}_{t\in[0,1]}$ *SBM auf* $\mathbb{R}^d$. *Es bezeichne* ν_ε *das durch*

$$\omega_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon}\omega_t$$

induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{C}_0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. *Dann genügt* $\{\nu_\varepsilon\}_\varepsilon$ *einem LDP auf* $\mathcal{C}_0([0,1])$ *mit guter Ratenfunktion*

$$I_\omega(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\varphi}(t)|^2 \, dt & \varphi \in H_1 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier ist $H_1 := \{\int_0^t f(s)\, ds | f \in L_2([0,1])\}$ *mit Norm*

$$\|g\|_{H_1} = \left(\int_0^1 \left|\dot{g}(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemma

Für jede Dimension d und für jedes $\tau, \varepsilon, \delta > 0$ *gilt*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} |\omega_\varepsilon(t)| \geq \delta\right) \leq 4de^{-\frac{\delta^2}{2d\tau\varepsilon}}.$$