Das Kontraktionsprinzip

Es seien (F, T) und (F', T') zwei vollständige, seperable metrische Räume („Polnische Räume"), und $f: F \to F'$ eine stetige Abbildung.
Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von E-wertigen Zufallsgrößen, die ein Prinzip der großen Abweichungen mit einer Ratenfunktion $I: F \to [0,\infty]$ erfülle.
Dann erfüllt auch die Folge $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Prinzip der großen Abweichungen mit derselben Rate und Ratenfkt.

$$I'(y) := \inf_{x\in f^{-1}(y)} I(x) \quad , y \in F'$$

Beweis

① I ist eine nicht ganz so gute Ratenfkt,
da i) $I \not\equiv \infty$
ii) I ist unterhalbstetig, ihre Fktswerte springen also nicht nach unten.

Sei $x \in F$ mit $I(x) < \infty$.
Dann ist $I'(f(x)) \le I(x) < \infty$
und somit $I' \not\equiv \infty$.
Außerdem ist für alle $s \geq 0$

$$\{y\in F' : I'(y) \le s\} = \{f(x) : x \in F, I(x) \le s\}$$
$$= f(\{I \le s\}).$$

Das Bild kompakter Mengen unter einer stetigen Abb ist wieder kompakt $\Rightarrow$ Daher sind auch die Subniveaumengen von I' kompakt und I' ist eine Ratenfunktion

[Begr.: ~~Eine Ratenfkt~~ Eine Fkt $I: F \to [0,\infty]$ heißt Ratenfkt falls
i) $I \not\equiv \infty$
ii) I hat kompakte Subniveaumengen]

Wir nehmen an $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle ein Prinzip der großen Abweichungen mit Rate $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Ratenfkt I.

② Sei $E \subset F'$ abgeschlossen.
Dann ist auch $f^{-1}(E)$ abgeschlossen in F.
Es gilt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P((f(X_n))^{-1}(F)) = \limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P\circ X_n^{-1}(f^{-1}(E))$$

$$\leq - \inf_{y\in f^{-1}(E)} I(y)$$

$$= - I'(E).$$

③ Sei analog $O \in \mathcal{F}'$ offen.
Dann ist auch $f^{-1}(O)$ offen in $\mathcal{F}$ und es gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P(f(X_n))^{-1}(O)) = \liminf \gamma_n^{-1} \log P\circ X_n^{-1}(f^{-1}(E))$$

$$\geq - \inf_{y\in f^{-1}(O)} I(y)$$

$$= - I'(O).$$

Satz von Dawson – Gärtner

Der Satz von Dawson und Gärtner ist ein Ergebnis in der Theorie der großen Abweichungen.

„Heuristisch gesprochen":

„Der Satz erlaubt einen Transport eines Prinzips aus der Theorie der großen Abweichungen aus einem „kleineren" topologischen auf einen „größeren" topologischen Raum.

Seien $(Y_j)_{j \in J}$ projektive Systeme aus topologischen Hausdorffschen Räumen mit Karten $p_{ij} : Y_j \to Y_i$

Sei X System der projektive „Limes"

(inverse auch bekannt als das Limit) des $(Y_j, p_{ij})_{i,j \in J}$,

i.e.

$$X = \varprojlim_{j \in J} Y_j = \{ y = (y_j)_{j \in J} \in Y = \prod_{j \in J} Y_j \mid i < j \Rightarrow y_i = p_{ij}(y_j) \}$$

Es sei $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine Familie von W-Maßen auf X.

Angenommen für jedes $j \in J$ gelte:

die „Push-forward-measures" $(p_j \cdot \mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ auf Y_j erfüllen das Prinzip der großen Abweichungen mit der guten Ratenfunktion $I_j : Y_j \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Dann erfüllt die Familie $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ das Prinzip der großen Abweichungen auf X mit der guten Ratenfunktion $I : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

mit $I(x) = \sup_{j \in J} I_j(p_j(x))$

DEF Prinzip großer Abweichungen

Eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf F genügt dem Prinzip großer Abweichungen (LDP) mit Rate n und Ratenfunktion I, falls

① $I : F \to [0,\infty]$ eine Ratenfunktion ist, d.h. $\exists x \in F$ mit $I(x) \neq \infty$
I besitzt kompakte Niveaumengen
$\{x \in F : f(x) \leq c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$
und ist halbstetig von unten.

② $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(C) \leq -I(C) \; \forall \, C \subseteq F$ abgeschlossen

③ $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(O) \geq -I(O) \; \forall \, O \subseteq F$ offen

Die Ratenfunktion einer Menge ist durch $I(S) = \inf_{x\in S} I(F)$ $\forall S \subseteq F$ definiert

Eindeutigkeit der Ratenfkt
$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge dem LDP.
Dann ist die zugehörige Ratenfkt eindeutig.

DEF Schwache Konvergenz

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ, falls

1.) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leq \mu(C) \; \forall C \subseteq F$ abgeschlossen

2.) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \leq \mu(O) \; \forall O \subseteq F$ offen

Bedingungen 1.) und 2.) sind äquivalent zu

$\lim_{n\to\infty} \int_F f(x)\,\mu_n(dx) = \int f(x)\,\mu(dx) \; \forall f \in C(F)$

Varadhan's Lemma

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge dem LDP auf F.
Sei $E: F \to \mathbb{R}$ eine stetige, von oben beschränkte Funktion.
Dann gilt für $x \in F$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_F e^{n E(x)} \mu_n(dx) = \sup_{x\in F} [F(x) - I(x)]$$

Alternative Version von Varadhan's Lemma

$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genüge dem LDP auf F.
Sei $E: F \to \mathbb{R}$ eine stetige, von oben beschränkte Funktion. Sei $x \in F$
Definiere $J_n(S) := \int_S e^{n E(x)} \mu_n(dx)$ $\forall S \subseteq F$ Borelmenge
Dann genügt die Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen,
definiert durch $\mu_n^E(S) := \frac{J_n(S)}{J_n(x)}$ dem LDP auf F
mit Raten und Ratenfkt:

$$I^E(x) = \sup_{y\in F} [F(y) - I(y)] - [F(x) - I(x)].$$

Eine wichtige Frage in der Theorie der großen Abweichungen ist die, nach der exponentiellen Rate von exponentiellen Momenten bzw. exponentiellen Integralen

Varadhans Lemma

Varadhans Lemma ist eine weitgehende Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode.

[<u>Lemma</u> (Der größte Exponent setzt sich durch)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen positiver reeller Zahlen.

Dann gilt:

$$\limsup \frac{1}{n}\log[a_n + b_n] = \max\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log a_n, \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log b_n\right\}$$

$\Rightarrow$ <u>Folgerung</u> <u>(Laplacesche Methode)</u>

Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gilt

$$\limsup \frac{1}{n}\log\int_0^1 dx\, e^{nf(x)} = \max_{[0,1]} f(x)$$
]

<u>Satz</u> Varadhans Lemma

Seien $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\gamma_n\uparrow\infty$ für $n\to\infty$.
Ferner seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge E-wertiger Zufallsvariablen mit den Verteilungen μ_n, $n\in\mathbb{N}$ und $I:E\to[0,\infty]$ eine Funktion.

(F2) Falls $F:E\to\mathbb{R}$ oberhalbstetig ist und (D_2) von der Def gr. Abweichungen

[P_2: $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}\log\mu(C)\le -I(C)$ für alle abgeschlossenen Mengen $C\subseteq E$.]

gilt, und I kompakte Subniveaumengen enthält, sowie

(F1) $$\lim_{M\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\gamma_n^{-1}\log E\left[e^{\gamma_n F(X_n)}\mathbb{1}_{\{F(X_n)\ge M\}}\right] = -\infty$$ gilt,

so ist

$$\limsup_{n\to\infty}\gamma_n^{-1}\log E\left[e^{\gamma_n F(X_n)}\right]\le\sup_{x\in E}\left(F(x)-I(x)\right)$$

(F3) Falls $F:E\to\mathbb{R}$ unterhalbstetig ist und (P_3) von der Def gr. Abweichungen

[P_3: $\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{\gamma_n}\log\mu(O)\ge -I(O)$ für alle offenen Mengen $O\subseteq E$] gilt,

so ist

$$\liminf_{n\to\infty}\gamma_n^{-1}\log E\left[e^{\gamma_n F(X_n)}\right]\ge\sup_{x\in E}\left(F(x)-I(x)\right).$$

Bem

i) Die Integrationsbedingung für die Abschätzung nach oben ist ~~ein~~ das Analogon zur gleichmäßigen Integrierbarkeit auf der exponentiellen Skala $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Die Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup \gamma_n^{-1} \log E\left[e^{\alpha \gamma_n F(X_n)}\right] < \infty$$

ii) Die Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn F nach oben beschränkt ist.

iii) Ist F nach oben beschränkt und stetig, dann gelten (F_2) und (F_3) und damit

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log E\left[e^{\gamma_n F(X_n)}\right] = \sup_{x\in E} (F(x) - I(x)).$$

Beweis vom Satz

"(F_2)"

Nehmen an, dass F nach oben beschränkt sei, d.h., es gäbe ein $M > 0$ mit $F \le M$.
Seien $s > 0$ und $\delta > 0$ fest gewählt.
Da I eine Ratenfkt ist, ist die Subniveaumenge $\Phi(s) := \{I \le s\}$ kompakt.
Da I und $-F$ unterhalbstetig sind, können wir zu jedem $x \in \Phi(s)$ eine offene Umgebung $G = G_x$ von x finden, so dass $\inf_{\overline{G}} I \ge I(x) - \delta$ und $\sup_{\overline{G}} F \le F(x) + \delta$.
Da $\bigcup_{x\in E} G_x \supset \{I \le s\}$ und $\{I \le s\}$ kompakt ist, können wir $\{I \le s\}$ mit endlich vielen der $\{G_x, x \in E\}$ überdecken.
Sei also angenommen, dass

$$\{I \le s\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} G_{x_i} \quad \text{für ein } N \in \mathbb{N}$$

und endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_N$.
Dann gilt für $i = 1, \dots, N$, dass

$$P\left[e^{\gamma_n F(X_n)}\right] \le \sum_{i=1}^{N} P\left[e^{\gamma_n F(X_n)} \mathbb{1}_{\{X_n \in G_{x_i}\}}\right] + e^{\gamma_n M} P\{X_n \notin \Phi(s)\}$$

und somit aufgrund von Lemma (Der größte Exponent setzt sich durch)

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P[e^{\gamma_n F(X_n)}] \le \max\{\max_{i=1}^{N} (F(x_i)+\delta-\inf I), M-s\}$$
$$\le \max\{\max_{i=1}^{N} (F(x_i)+2\delta-I(x_i)), M-s\}$$

Da diese Ungleichung für alle $s>0$ und $\delta>0$ gilt, folgt die Beh. für beschränkte Zufallsvariablen.

Im allgemeinen Fall setzen wir für jedes $M\in\mathbb{R}^+$: $F_M := F\wedge M$ und schließen mithilfe des bereits gezeigten, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P[e^{\gamma_n F(X_n)}]$$
$$\le \max\{\sup_E (F_M - I), \limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log E[e^{\gamma_n F(X_n)} 1_{\{F(X_n)\ge M\}}]\}$$

Nach Vorraussetzung wird der zweite Ausdruck auf der rechten Seite für $M\to\infty$ beliebig groß, sodass F_2 auch im allgemeinen Fall gilt.

"F_3" Seien F oberhalbstetig, $x\in E$ und $\delta>0$ beliebig fest gewählt. Dann gibt es eine offene Umgebung $G=G_{x,\delta}$ von x, sodass

$$\inf_G F \ge F(x)-\delta.$$

Damit ist

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log E[e^{\gamma_n F(X_n)}]$$
$$\ge \limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log E[e^{\gamma_n F(X_n)} \cdot 1_{\{X_n\in G\}}]$$
$$\ge \inf_G F + \limsup_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P\{X_n\in G\}$$
$$\ge F(x)-\delta-\inf_G I \ge F(x)-I(x)-\delta$$

Da $x\in E$ un $\delta>0$ beliebig waren, folgt somit

$$\liminf_{n\to\infty} \gamma_n^{-1} \log P[e^{\gamma_n F(X_n)}] \ge \sup_{x\in E}(F(x)-I(x))$$

was der Beh. F_3 entspricht.