Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 27.01.2009, 10:15 Uhr

Aufgabe 21. (5 Punkte)
Sei $(X_{i,n})_{i\leq n}$ ein Dreiecksschema unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, deren Verteilung im Anziehungsbereich einer max-stabilen Verteilung liege. Zeigen Sie, dass eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\tau\in\mathbb{R}$ existieren, so dass für jedes $k\in\{1,\dots,n\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,\dots,n\}} P\left(X_{j_r,n}>u_n \quad \forall r\in\{1,\dots,k\}\right)=\frac{\tau^k}{k!}.$$

Lösung:
Sei F die Verteilungsfunktion von $X_{1,1}$. Wegen der Unabhängigkeit der $X_{j_r,n}$ folgt

$$P\left(X_{j_r,n}>u_n \quad \forall r\in\{1,\dots,k\}\right)=\left(1-F(u_n)\right)^k.$$

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, $\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,\dots,n\}$ zu wählen, so dass

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,\dots,n\}} P\left(X_{j_r,n}>u_n \quad \forall r\in\{1,\dots,k\}\right)\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(1-F(u_n)\right)^k\\ =&\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(n(1-F(u_n))\right)^k.\end{aligned}$$

Die Existenz eines τ und einer Folge u_n, so dass $n(1-F(u_n))\to\tau$ folgt dann mit Aufgabe 2 zum Beispiel aus Satz 2.2.