Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 21.10.2008, 10:15 Uhr

Aufgabe 1. (5 Punkte)
Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit $X_1 \sim \mathfrak{R}(-1,1)$ und sei $M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Bestimmen Sie Folgen a_n und b_n, so dass $a_n(M_n - b_n)$ in Verteilung gegen eine nicht-entartete Verteilung konvergiert und bestimmen sie die Verteilungsfunktion der Grenzverteilung.

Aufgabe 2. (5 Punkte)
Sei $\tau \in \mathbb{R}^+$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktion F und $M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}.$$

Aufgabe 3. (5 Punkte)
Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit $X_1 \sim \mathrm{C}(0,1)$ und sei $M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i$. Bestimmen Sie Folgen a_n und b_n, so dass $a_n(M_n - b_n)$ in Verteilung gegen eine nicht-entartete Verteilung konvergiert und bestimmen sie die Verteilungsfunktion der Grenzverteilung.
Hinweis: Die Verteilungsfunktion der Cauchy-Verteilung mit Parametern 0 und 1 hat die Form

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

Der Arcustangens erfüllt die Gleichung

$$\arctan x = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x};$$

beweisen Sie diese, falls Sie sie benötigen.