**Übungen**
Abgabetermin: Dienstag, 16.12.2008, 10 Uhr

**Aufgabe 32** (6 Punkte)
Wir definieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$ auf $\mathcal{C}[0,1]$ wie folgt. Für jedes $t \in [0,1]$ sei $y^t \in \mathcal{C}[0,1]$ gegeben durch

$$y^t(s) := \begin{cases} \frac{s}{t} & \text{für } 0 \leq s \leq t \\ \frac{1-s}{1-t} & \text{für } t < s \leq 1. \end{cases}$$

$\delta_{y^t}$ sei das Dirac-Maß auf $y^t$ und

$$Q := \int_0^1 \delta_{y^t} \; \lambda(dt).$$

Weiter habe $X = (X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ Verteilung $Q$.

(i) Geben Sie die Verteilung von $\max\limits_{0 \leq s \leq 1} X_s$ an.

(ii) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von $X_{\frac{1}{2}}$.

**Aufgabe 33** (7 Punkte)
Es sei $S$ ein polnischer Raum mit Metrik $d$, $X$ sei eine Zufallsvariable mit Werten in $S$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Folgen von Zufallsvariablen mit Werten in $S$. Es gelte

$$X_n \xrightarrow{d} X \text{ und } d(X_n, Y_n) \longrightarrow 0 \text{ stochastisch.}$$

Zeigen Sie:

$$Y_n \xrightarrow{d} X.$$

**Aufgabe 34** (7 Punkte)
Es sei $S$ ein polnischer Raum. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien Folgen von Zufallsvariablen mit Werten in $S$, so dass $X_n$ stochastisch unabhängig von $Y_n$ ist, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter gelte

$$X_n \xrightarrow{d} X_0 \text{ und } Y_n \xrightarrow{d} Y_0.$$

Zeigen Sie:

$$(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X_0, Y_0).$$

Bitte wenden.

**Aufgabe 35($*$)** (5 Punkte)
Es sei $(B_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Brownschen Bewegungen ($0 \leq t \leq 1$). Dann ist

$$W_t = \begin{cases} B_t^1 & \text{für } t \in [0,1] \\ W_i + B_{t-i}^{i+1} & \text{für } t \in (i, i+1] \text{ und alle } i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

eine Brownsche Bewegung auf $[0,\infty)$. Für $\sigma, \mu > 0$ definieren wir einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ durch $X_t := \mu t + \sigma W_t$. $T$ sei die Aufenthaltszeit von $(X_t)_{t\geq 0}$ auf der negativen Halbachse, also

$$T := \int_0^\infty \mathrm{I}_{(-\infty,0)}(X_t)\; dt.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von $T$, d.h. die erwartete Aufenthaltszeit von $(X_t)_{t\geq 0}$ in $(-\infty, 0)$.