Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 09.12.2008, 10 Uhr

Aufgabe 29
Es sei $(\lambda_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei μ_n die Exponentialverteilung mit Parameter λ_n. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $\mathcal{M} := \{\mu_n | n \in \mathbb{N}\}$ straff ist.

Aufgabe 30 (10 Punkte)
$S = \mathcal{C}[0,1]$ sei der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$, versehen mit der Norm $\|x\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ und der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_S$ über $\mathcal{C}[0,1]$.

(i) Für $t \in [0,1]$ sei $g_t : S \to \mathbb{R}$ durch $g_t(x) = x(t)$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F} := \sigma(\{g_t | 0 \leq t \leq 1\}) = \mathfrak{B}_S$$

gilt.

(ii) Mit $\mathcal{C}_b(S)$ werde die Menge der stetigen und beschränkten Funktionen auf S bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = \sigma\big(\{f | f \in \mathcal{C}_b(S)\}\big)$.

(iii) Die Mengen

$$\{x \in S | (x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)) \in A\} \text{ für } A \in \mathfrak{B}^n,\ 0 \leq t_1 < ... < t_n \leq 1$$

heißen Zylindermengen auf S. $\mathcal{Z}$ sei die Menge aller Zylindermengen auf $S = \mathcal{C}[0,1]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{Z})$.

Aufgabe 31
Es sei $(B_t)_{t\in[0,1]}$ eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$X_t := B_{1-t} - B_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ist.