Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 02.12.2008, 10 Uhr

Aufgabe 25
Es seien $0 < q < p < 1$ gegeben. Die Folge $(Y_i)_i$ sei uiv bezüglich $\mathbb{P}$ mit

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 0)$$

und uiv bezüglich Q mit

$$Q(Y_1 = 1) = q = 1 - Q(Y_1 = 0)$$

und $X_n := \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{A}_n}$ für $n = 1, 2, \dots$.

(i) Zeigen Sie: $(X_n)_n$ ist ein Martingal bezüglich $\mathbb{P}$.

(ii) Zeigen Sie: $(X_n)_n$ konvergiert sowohl $\mathbb{P}$-f.s. als auch Q-f.s.. Bestimmen Sie jeweils den Limes.

(iii) Ist $(X_n)_n$ gleichmäßig integrierbar bezüglich $\mathbb{P}$?

Aufgabe 26
Es seien $Y_1, ..., Y_n$ uiv bzgl. $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{3}$. und uiv bzgl. Q wobei Y_1 gleichverteilt auf $[-2, 2]$ ist unter Q. Betrachte dann $R := \frac{1}{2}\mathbb{P} + \frac{1}{2}Q$ mit der σ-Algebra $\mathcal{A} = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$. Bestimmen Sie die folgenden verallgemeinerten Radon-Nikodym-Dichten:

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{A}}, \ \frac{d\mathbb{P}}{dR}\bigg|_{\mathcal{A}} \text{ und } \frac{dQ}{dR}\bigg|_{\mathcal{A}}.$$

Aufgabe 27
Es sei $(Y_i)_i$ eine Folge von bezüglich $\mathbb{P}$ unabhängig und identisch standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Weiter sei $(Y_i)_i$ auch unabhängig bezüglich Q, wobei Y_i die Verteilung $\mathcal{N}(m_i, 1)$ bezüglich Q für jedes $i \in \mathbb{N}$ hat. Betrachte die kanonische Filtration $\mathcal{A}_n$, und $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$.

(i) Bestimmen Sie die Radon-Nikodym-Dichte $X_n = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{A}_n}$.

(ii) Zeigen Sie:

$$Q \ll \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{A}_\infty \iff \sum_{i=1}^{\infty} m_i^2 < \infty.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 28
Die Folge $(\alpha_i)_i$ reeller Zahlen erfülle $\alpha_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, ...$ seien bezüglich $\mathbb{P}$ unabhängig und alle exponentialverteilt mit Parameter 1 und bezüglich Q seien die Y_i unabhängig und jeweils exponentialverteilt mit Parameter α_i für $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ und $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{A}_n)$.

(i) Bestimmen Sie die Radon-Nikodym-Dichte $X_n = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{A}_n}$.

(ii) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass

$$Q \ll \mathbb{P} \text{ auf } \mathcal{A}_\infty$$

gilt.