Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 25.11.2008, 10 Uhr

Aufgabe 21
Es sei $(S, \mathcal{S})$ ein endlicher Messraum. Weiter sei $(\Omega, \mathcal{A}) := (S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}})$ der zugehörige Produktraum und

$$X_i : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & S \\ \omega & \mapsto & \omega_i \end{array}$$

die Projektion auf die i-te Komponente. Durch die empirische Verteilung $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$ wird die Menge

$$A_\infty := \left\{\omega \in \Omega \middle| \exists \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}\right\} \in A^* = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$$

gegeben. Für ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $(S, \mathcal{S})$ setzen wir

$$\rho_\omega := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)} & \text{für } \omega \in A_\infty \\ \nu & \text{für } \omega \notin A_\infty. \end{cases}$$

$\mathbb{P}_{\rho_\omega}$ sei das Produktmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit Randverteilung ρ_ω. Zeigen Sie, dass durch $\omega \mapsto \mathbb{P}_{\rho_\omega}$ ein stochastischer Kern von $(\Omega, \mathcal{A}^*)$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird.

Aufgabe 22
Auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ seien zwei symmetrische Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ definiert. Zeigen Sie, dass für ein $\alpha \in (0,1)$ auch die Mischung

$$\alpha\mathbb{P}_1 + (1-\alpha)\mathbb{P}_2$$

symmetrisch ist.

Aufgabe 23
Es sei $(S, \mathcal{S})$ ein Messraum. Weiter sei $(\Omega, \mathcal{A}) := (S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}})$ der zugehörige Produktraum und $X_i : \Omega \rightarrow S, \omega \mapsto \omega_i$ die Projektion auf die i-te Komponente. $A^* = \bigcap_{n=1}^\infty \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ bezeichne die terminale σ-Algebra. Geben Sie ein Beispiel eines symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ und eine Menge $A \in \mathcal{A}^*$ an, so dass

$$0 < \mathbb{P}(A) < 1.$$

Aufgabe 24
Polyas Urne: Es sei eine Urne gegeben, die $K \in \mathbb{N}$ weiße, und $N - K \in \mathbb{N}$ schwarze Kugeln enthält. Eine Kugel wird zufällig gezogen und ihre Farbe wird notiert. Dann wird diese Kugel zusammen mit weiteren $c \in \mathbb{N}$ Kugeln dieser Farbe in die Urne zurück gelegt. Es wird wieder eine Kugel zufällig gezogen, usw.. Wir setzen

$$\Omega = \big\{\omega = (x_1, x_2, ...)\big| x_i \in \{0,1\}\big\}$$

$$X_i(\omega) = x_i = \begin{cases} 1 & \text{Kugel im } i\text{-ten Zug ist weiß} \\ 0 & \text{Kugel im } i\text{-ten Zug ist schwarz} \end{cases}$$

Sei Y_n der Anteil der weißen Kugeln zum Zeitpunkt n, d.h.

$$Y_n = \frac{K + c \cdot S_n}{N + c \cdot n} \quad \text{wobei } S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Zeigen Sie, mit dem Satz von de Finetti: $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mathbb{P}$-f.s. gegen eine Zufallsvariable Y_∞ mit $0 \leq Y_\infty \leq 1$.