Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 18.11.2008, 10 Uhr

Aufgabe 17

Y, Z_1 und Z_2 seien Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und $Y \in L^1$.

(i) Z_2 sei unabhängig von (Y, Z_1). Zeigen Sie

$$\mathbb{E}[Y|\sigma(Z_1)] = \mathbb{E}[Y|\sigma(Z_1, Z_2)]. \tag{$*$}$$

(ii) Z_2 sei unabhängig von Y und Z_2 sei unabhängig von Z_1. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $(*)$ nicht gilt.

Aufgabe 18

Polyas Urne: Es sei eine Urne gegeben, die $K \in \mathbb{N}$ weiße, und $N - K \in \mathbb{N}$ schwarze Kugeln enthält. Eine Kugel wird zufällig gezogen und ihre Farbe wird notiert. Dann wird diese Kugel zusammen mit weiteren $c \in \mathbb{N}$ Kugeln dieser Farbe in die Urne zurück gelegt. Es wird wieder eine Kugel zufällig gezogen, usw.. Wir setzen

$$\Omega = \big\{\omega = (x_1, x_2, ...)\big| x_i \in \{0, 1\}\big\}$$
$$X_i(\omega) = x_i = \begin{cases} 1 & \text{Kugel im } i\text{-ten Zug ist weiß} \\ 0 & \text{Kugel im } i\text{-ten Zug ist schwarz} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ austauschbar ist.

Aufgabe 19

Sei $(S, \mathcal{M})$ ein Messraum, $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, $X_i : \Omega \to S$, $X_i(\omega) = \omega(i)$ für $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \sigma(X_1, X_2, ...)$. Dann ist $\mathcal{A}^* := \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, ...)$ die terminale σ-Algebra. Weiter sei $\mathcal{E}$ die σ-Algebra der symmetrischen Ereignisse.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{E}$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge $A \in \mathcal{A}$, für die zwar $A \in \mathcal{E}$, aber $A \notin \mathcal{A}^*$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 20
Sei $(Y_i)_i$ eine Folge von uiv Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$ und sei $S_n := \sum_{k=0}^n Y_k$ die Partialsumme. Weiter sei $(\gamma_n)_n$ eine reellwertige Folge mit $\gamma_n \to \infty$ und $\frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \to 0$. Zeigen Sie:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{\gamma_n^2} \log \left(\mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}\gamma_n) \right) \right) \leq -\frac{1}{2}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(S_n \geq \sqrt{n}\gamma_n) \leq \mathbb{E}\left[e^{\lambda_n S_n} \right] e^{-\lambda_n \sqrt{n}\gamma_n}$$

mit $\lambda_n = \lambda \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}$ für ein festes $\lambda > 0$.