Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 11.11.2008, 10 Uhr

Aufgabe 13
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Darauf sei eine aufsteigende Folge von σ-Algebren $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert mit $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei (M_n) ein an $(\mathcal{A}_n)$ adaptiertes Martingal welches $M_n \in L^2$ erfüllt, und $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei der zu (M_n) gehörende Varianzprozess. Zeigen Sie, dass für eine Stoppzeit T der Prozess $(V_{T\wedge n})$ der zu $(M_{T\wedge n})$ gehörende Varianzprozess ist.

Aufgabe 14
Es sei $(Y_i)_i$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und es gelte $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wissen bereits:

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[Y_i^2] < \infty \tag{1}$$

impliziert

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2}$$

Nennen Sie ein Beispiel, in dem (1) verletzt ist, und auch (2) nicht gilt.

Aufgabe 15
$(Y_i)_i$ sei eine Folge von uiv Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{3}{4}$. Für

$$S_n := x + \sum_{i=1}^n Y_i \text{ mit } x \in \{0, 1, ..., 8\} \quad \text{sei} \quad T_{0,8} := \inf\{n | S_n \in \{0, 8\}\}$$

definiert. Wir betrachten nun die in T gestoppte asymmetrische Irrfahrt $S_{T\wedge n}$. Die Auszahlungsfunktion g sei gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} g(0) = 1 & g(1) = 2 & g(2) = 3 \\ g(3) = 1 & g(4) = 2 & g(5) = 1 \\ g(6) = 2 & g(7) = 4 & g(8) = 1. \end{array}$$

Bestimmen Sie für den Startpunkt $x = 3$ eine Stoppzeit $T^* \leq T$ so, dass die erwartete Auszahlung $\mathbb{E}[g(S_{T^*})]$ maximiert wird, und berechnen sie diese.
Hinweis: $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{S_n}\right)_n$ ist ein Martingal.

Aufgabe 16
Betrachte eine Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellwertigen Zufallsgrößen, die $Y_n \in L^2$ für jedes n erfüllen. $(\mathcal{A}_n)$ sei die kanonische Filtration. Weiter gelte

$$\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{A}_{n-1}] = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y_n^2|\mathcal{A}_{n-1}] = \sigma_n^2 \ \mathbb{P}\text{-f.s., für } n = 1, 2, 3, ..., \tag{3}$$

für eine Folge (σ_n) positiver reeller Zahlen. Wir definieren dann $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für $n \in \mathbb{N}$.

(i) Zeigen Sie:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty \Longrightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(ii) Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |Y_n| \leq M < \infty$ gilt auch die Umkehrung, also
$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \mathbb{P}\text{-f.s.} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$$

(iii) Geben Sie ein Beispiel an, in dem (3) erfüllt ist, aber in dem die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, ...$ <u>nicht</u> unabhängig sind.