Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 04.11.2008, 10 Uhr

Aufgabe 9
Es sei $(Y_i)_i$ eine Folge von beschränkten, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen. Wir definieren

$$M_n := e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\varphi(\lambda)}.$$

Bestimmen Sie die Funktion φ so, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Folge (M_n) ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration ist.

Aufgabe 10
Es sei $(Y_n)_n$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen die

$$\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{n}{n+1}, \quad \mathbb{P}(Y_n = n) = \frac{1}{n+1}$$

erfüllen, und $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ sei die kanonische Filtration. Dann ist $M_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal. Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} M_n = \infty) = 1.$

(ii) $\mathbb{P}(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} M_n = -\infty) = 1.$
Hinweis: Modifizieren Sie Satz 14.18 aus der Vorlesung WT 1.

Aufgabe 11
Gegeben sei jeweils ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der kanonischen Filtration $(\mathcal{A}_n)$. Weiter sei eine Folge $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen definiert.
Überprüfen Sie jeweils, ob es sich bei $(N_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ um ein Sub-/Supermartingal bzgl. (A_n) handelt und bestimmen Sie die Doob-Zerlegung.

(i) $X_1, X_2, ...$ uiv mit $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{3}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $N_0 := 0$, $N_n := \sum_{i=1}^n X_i$ für $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $X_0 := 1$ $\mathbb{P}$-f.s., $\mathbb{P}(X_i = 2x | X_{i-1} = x) = \mathbb{P}(X_i = x | X_{i-1} = x) = \frac{1}{2}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $N_n := X_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $X_0, X_1, ...$ uiv mit $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{1}{2}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $N_0 := 0$, $N_n := N_{n-1} + X_n \cdot X_{n-1}$ für $i \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden.

Aufgabe 12
Es bezeichne $(S_n)_n$ die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, d.h. $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ wobei die X_i unabhängig und identisch Bernoulli$\left(\frac{1}{2}\right)$ verteilt sind. Bekannt ist, dass (S_n) ein Martingal ist, also ist $(|S_n|)$ ein Submartingal. Wir betrachten (M_n) und (A_n) so, dass $|S_n| = M_n + A_n$ die Doob-Zerlegung von $(|S_n|)$ ist. Zeigen Sie:

(i) $A_n = \#\big\{i \in \{0, ..., n-1\} \big| |S_i| = 0\big\}$

(ii) $\mathbb{E}\,|S_n| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{2i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i}$

Klausurtermin: Die Klausur wird am 30.01.2009 (Freitag) ab 14 Uhr geschrieben.