Übungen

Abgabetermin: Dienstag, 28.10.2008, 10 Uhr

Aufgabe 5

Geben Sie ein Martingal (M_n) an, welches sowohl für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\, M_n = 0$$

als auch $M_n \to -\infty$ $\mathbb{P}$-f.s. erfüllt.

Hinweis: Denken Sie zum Beispiel an Summen von unabhängigen Zufallsvariablen.

Aufgabe 6

S, T seien Stoppzeiten für die Filtration $(\mathcal{A}_n)$. Zeigen Sie, dass

(i) $S \wedge T = \min(S, T)$ eine Stoppzeit ist.

(ii) $S \vee T = \max(S, T)$ eine Stoppzeit ist.

(iii) $S + T$ eine Stoppzeit ist.

(iv) mS für $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ eine Stoppzeit ist.

Aufgabe 7

$(Y_i)_{i\geq 1}$ sei eine Folge von uiv Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Weiter sei $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für $n \geq 0$, und damit für jedes $c \in \mathbb{N}$

$$T_c := \min\left\{n \in \mathbb{N} \big| |S_n| = c\right\}$$

definiert. Bestimmen Sie $\mathbb{E}\, T_c$.

Hinweis: Betrachten Sie $M_n := {S_n}^2 - n$ für $n = 0, 1, 2, ...$ und zeigen Sie, dass (M_n) ein Martingal bezüglich der kanonischen Filtration $\mathcal{A}_n := \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ ist.

Aufgabe 7(∗) (5 Punkte)

$(S_n)_n$ sei genauso definiert wie in Aufgabe 7. Ist $T_{c,+} := \min\{n \in \mathbb{N} | S_n = c\}$ ($\mathbb{P}$-f.s.) endlich? Hat $T_{c,+}$ einen endlichen Erwartungswert?

Bitte wenden.

Aufgabe 8
$(Y_i)_{i\geq 1}$ sei eine Folge von uiv Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\, Y_1 = 1, Y_1 \geq 0, P(Y_1 = 1) < 1$ und $(\mathcal{A}_n)$ sei die kanonische Filtration. Zeigen Sie, dass

$$M_n := \prod_{i=1}^{n} Y_i$$

ein Martingal ist. Zeigen Sie weiter, dass M_n $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert und bestimmen Sie den Limes M_∞. Überprüfen Sie, ob (M_n) gleichmäßig integrierbar ist.