Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 20.01.2009, 10 Uhr

Aufgabe 44
Es sei $(X_t)_{0 \le t \le 1}$ eine Brownsche Bewegung. Die Zufallsvariable Z sei definiert durch

$$Z = \int_0^1 X_s(\omega)\ ds.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z.

Aufgabe 45
Der Zufallsvektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ sei normalverteilt mit Erwartungswert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Kovarianzmatrix Σ.

(i) Zeigen Sie, es gibt $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ und eine von Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariable Z, so dass

$$X = aY + bZ$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass die bedingte Verteilung von X gegeben Y

$$\mathcal{N}(aY, b^2)$$

ist, d.h. die bedingte Dichte $f(x|y)$ ist gegeben durch $f(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-\frac{(x-ay)^2}{2b^2}}$.

Aufgabe 46
Es sei $(X_t)_{t \ge 0}$ eine Brownsche Bewegung. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = x^3 + x^2.$$

Berechnen Sie für $t > s \ge 0$

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) \middle| \sigma\big(X_u | u \le s\big)\right].$$

Bitte wenden.

Aufgabe 47

Es sei $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ eine Brownsche Brücke.

(i) Zeigen Sie, dass (B_t) ein Gaußprozess ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für $0 \leq s < t \leq 1$ die bedingte Verteilung von B_t gegeben B_s

$$\mathcal{N}\left(\frac{1-t}{1-s}B_s, \frac{1-t}{1-s}(t-s)\right)$$

ist.