Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 13.01.2009, 10 Uhr

Aufgabe 40
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\limits_{0\leq s\leq 2} X_s$.

Aufgabe 41
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = 1 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$
$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{X_t}{\sqrt{2t\log(\log(t))}} = -1 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\frac{X_n}{\sqrt{2t\log(\log(n))}}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 42
Die Haar-Funktionen sind jeweils auf $[0,1]$ definiert durch

$$\varphi_0(t) := 1$$
$$\varphi_{n,k}(t) := \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } \frac{k-1}{2^{n-1}} \leq t < \frac{k-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} \\ -2^{\frac{n-1}{2}} & \text{für } \frac{k-\frac{1}{2}}{2^{n-1}} \leq t < \frac{k}{2^{n-1}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad n \in \{1,2,...\},\ k \in \{1,2,...,2^{n-1}\}.$$

Es sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Abzählung der Haar-Funktionen und

$$e_n(t) = \int_0^t \varphi_n(s)\, ds \quad (0 \leq t \leq 1)$$

seien die zugehörigen Schauder-Funktionen. Zeigen Sie, dass die Haar-Funktionen eine vollständige orthonormierte Basis von $L^2[0,1]$ bilden.

Aufgabe 43
Sei μ das Wienermaß auf $(\mathcal{C}[0,1],\mathcal{F})$ und ν die Verteilung der Brownschen Brücke. Wir definieren, für $m = 1,2,...$, Wahrscheinlichkeitsmaße μ_m auf $(\mathcal{C}[0,1],\mathcal{F})$ durch

$$\mu_m := \mu\big(\,\cdot\,\big||X_1| \leq \frac{1}{m}\big).$$

Zeigen Sie, dass $\mu_m \xrightarrow{w} \nu$ für $m \to \infty$.