Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 06.01.2009, 10 Uhr

Aufgabe 36
Es sei $X = (X_1, ..., X_d)$ normalverteilt. Zeigen Sie, dass dann gilt:

(i) Die X_i sind jeweils normalverteilt $(1 \leq i \leq d)$.

(ii) $X_1 + ... + X_d$ ist normalverteilt.

(iii) Jede endlich-dimensionale Randverteilung von X ist eine Normalverteilung.

Aufgabe 37
Es seien X_1, X_2 zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x_1, x_2) := \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\frac{3}{2}x_1^2 - x_1 x_2 - \frac{3}{2}x_2^2}.$$

(i) Bestimmen Sie die Verteilung von X_1 und von X_2. Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig?

(ii) Sei $Y_1 := X_1 + X_2$ und $Y_2 := X_1 - X_2$. Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von Y_1 und Y_2. Sind Y_1 und Y_2 stochastisch unabhängig?

Aufgabe 38
Es sei $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für $r \in (0, 1)$ gilt:

$$(X_t)_{0 \leq t \leq 1-r} \stackrel{d}{=} (X_t - X_r)_{r \leq t \leq 1}.$$

Aufgabe 39
Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess V_t ist definiert durch

$$V_t = e^{-t} \, X_{e^{2t}} \quad \text{mit } t \geq 0.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) $(V_t)_{t \geq 0}$ ist ein Gauß-Prozess.

(ii) $(V_t)_{t \geq 0}$ hat stationäre Zuwächse, d.h. für $s < t$ hängt die Verteilung von $V_t - V_s$ nur von $t - s$ ab.

(iii) Für $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ ist die Familie $(V_{t_i} - V_{t_{i-1}})_{i \in \{1,...,n\}}$ nicht unabhängig.