Übungen
Abgabetermin: Dienstag, 21.10.2008, 10 Uhr

Aufgabe 1
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in L^1(\mathbb{P})$ eine Zufallsvariable. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Wir definieren die bedingte Varianz von X bezüglich $\mathcal{G}$ wie folgt:

$$\mathrm{Var}\,(X|G) := \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right)^2 \middle| \mathcal{G}\right].$$

(i) Zeigen Sie: $\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]^2$.

(ii) Zeigen Sie: $\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}\,(X|\mathcal{G})] + \mathrm{Var}\,(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$.

(iii) $X_1, X_2, ...$ seien unabhängig mit $\mathbb{E}\,X_i = m$ und $\mathrm{Var}\,(X_i) = \sigma^2$ für alle $i = 1, 2, ...$ Die Zufallsvariable T sei unabhängig von $X_1, X_2, ...$, mit Werten in $\{0, 1, 2, ...\}$ und $\mathbb{E}\,T < \infty$. Wir setzen $S_T = \sum_{i=1}^{T} X_i$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\mathbb{E}\,S_T = m\ \mathbb{E}\,T.$$

Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}\,(S_T) = \sigma^2\,\mathbb{E}\,T + m^2\mathrm{Var}\,(T).$$

Aufgabe 2
Sei (Z_n) ein Verzweigungsprozess, d.h.

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{k,n+1}$$

mit $Y_{k,n} \in L^1$, $Y_{k,n}$ u.i.v. und $Y_{k,n} \in \mathbb{N}_0$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $m := \mathbb{E}\,Y_{k,n}$ und $\mathcal{A}_n = \sigma(Z_0, Z_1, ..., Z_n)$ für $n = 0, 1, 2, ...$ Zeigen Sie, dass $\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_n)$ ist.

Aufgabe 3
Polyas Urne: Eine Urne enthalte zum Zeitpunkt 0 genau eine rote und eine schwarze Kugel. Zu jedem Zeitpunkt (von 1 an) wird eine Kugel gezogen, die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt und eine weitere Kugel derselben Farbe hinzugefügt.
Sei X_i $(i \in \mathbb{N})$ der Indikator dafür, dass im i-ten Zug eine schwarze Kugel gezogen wird und $\mathcal{A}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$. Sei

$$M_n = \frac{S_n + 1}{n + 2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n + 2}$$

der Anteil der schwarzen Kugeln nach dem n-ten Mal Ziehen (und Zurücklegen). Ist (M_n) ein Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_n)$?

Bitte wenden.

Aufgabe 4

(i) Zeigen Sie: Ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit $M_n \in L^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sind die Zuwächse

$$\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$$

paarweise unkorreliert.

(ii) Zeigen Sie, dass für Martingale unter der Annahme

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[(\Delta M_n)^2\right] < \infty$$

ein schwaches Gesetzt der großen Zahlen gilt, d.h. zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt.

Übungsbeginn:	Freitag 17.10.2008
Übungsgruppen:	Kommen Sie am ersten Freitag zur Übung Ihrer Wahl. Sollte es dabei zu Platzproblemen kommen wird alles weitere vor Ort geklärt.
Aufgabenblätter:	Die Aufgabenblätter werden jeweils dienstags in der Vorlesung herausgegeben und während des Tages ins Internet gestellt.
Klausur:	Hinreichend für die Zulassung zur Scheinklausur sind 50% der auf den Übungsblättern erreichbaren Punkte.
Übungsschein:	Für den Erwerb des Scheins ist das Bestehen der Klausur notwendig.
Sprechstunden:	Prof. N. Gantert: Donnerstag 14:00 - 15:00 Uhr, Zimmer 218 M. Ebbers: nach Vereinbarung, Zimmer 215