

# Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 07

19.05.2015

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit deterministischer zeitabhängiger Volatilität  $\sigma$  und deterministischer zeitabhängiger Zinsrate  $r$ . Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes erfüllt der Aktienpreisprozeß also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)dW^*(t))$$

mit Anfangskurs  $S_0 = x > 0$ .

1. Berechnen Sie den Preis eines digitalen Calls, der zum Zeitpunkt  $T$  die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis in  $T$  die Basis  $K > 0$  überschreitet.
2. Berechnen Sie den Preis eines entsprechenden digitalen Puts, der zum Zeitpunkt  $T$  die Auszahlung 1 liefert, wenn der Aktienpreis die Basis  $K > 0$  unterschreitet.
3. Berechnen Sie für beide Optionen die jeweilige Hedgestrategie.
4. Wie kann für eine Funktion  $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\mathbb{E}^*h(S_T) < \infty$  der Preis eines Derivates mit Auszahlung  $h(S_T)$  durch die Preise von digitalen Optionen ausgedrückt werden.

## Aufgabe 2: Firmenwertansatz von Merton

4 Punkte

Der Firmenwertansatz von Merton ist eine Methode ausfallgefährdete Unternehmensanleihen mit Optionspreistheorie zu bewerten. Im ursprünglichen einfachsten Modell wird eine Firmenwertentwicklung  $(X_t)$  der Form

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert  $x_0 > 0$  angenommen. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass Kapital auf einem Geldmarktkonto sich mit der konstanten Rate  $r > 0$  verzinst.

Ein Fremdkapitalgeber der Firma leiht der Firma einen Nominalbetrag  $F$  für  $T$  Zeiteinheiten. Dieser Kredit kann dann zurückgezahlt werden, wenn das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt  $T$  die Verbindlichkeit  $F$  übersteigt. Reicht das Vermögen der Firma zum Zeitpunkt  $T$  nicht aus, um die Verbindlichkeit vollständig zu begleichen, muß die Firma Konkurs anmelden und die Konkursmasse zur weitestgehenden Begleichung der Schulden benutzen.

Das Eigenkapital der Firma zur Zeit  $t$  ist das Vermögen zu diesem Zeitpunkt vermindert um den Wert des Fremdkapitals zur Zeit  $t$ .

1. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass das gesamte Fremdkapital nur von einer Adresse gegeben wird, den Wert der Position des Fremdkapitalgebers. Hinweis: Wie können Sie die Position des Fremdkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben.
2. Wie können Sie die Position des Eigenkapitalgebers durch ein Derivat beschreiben und wie können Sie diese bewerten.

**Aufgabe 3:** Asset or nothing call option

4 Punkte

Wir betrachten das Black-Scholes Modell aus Aufgabe 1. Eine asset or nothing call option mit Fälligkeit  $T$  und Basis  $K$  ist ein Derivat mit Auszahlung  $S_T 1_{\{S_T \geq K\}}$  zum Zeitpunkt  $T$ .

1. Bestimmen Sie den arbitragefreien Anfangspreis dieser Option?
2. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie.
3. Was passiert mit ihrem Aktienanteil im Hedge, falls das asset einen Preis nahe  $K$  hat zu Zeitpunkten  $t$  nahe  $T$ . Kommentieren Sie dies.

**Aufgabe 4:** Forward start option

4 Punkte

Wir betrachten das Black-Scholes Modell aus Aufgabe 1. Eine forward start option gibt deren Inhaber das Recht zum Zeitpunkt  $T_0 < T_1$  ohne Einsatz von Kapital einen Call mit Fälligkeit  $T_1$  und Basis  $S(T_0)$  zu erwerben.

1. Geben Sie den arbitragefreien Preisprozeß dieser Option an.
2. Wie können Sie diese Option replizieren?