Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **12.05.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Gegeben sei ein eindimensionales Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten. Wir bezeichnen mit (S_t) den Aktienpreisprozeß und betrachten eine Call-Option mit Laufzeit T zur Basis K, die entsprechend ihrem arbitragefreien Preisprozeß

$$C(t) = e^{r(t-T)}\mathbb{E}^*((S_T - K)^+|\mathfrak{F}_t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gehandelt werden kann.

1. Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt $(C(t))_{0 \leq t \leq T}$.
2. Wie kann durch einen Handel in Aktie und Call-Option das Geldmarktkonto repliziert werden?

Aufgabe 2: Exchange Option 6 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit zwei risky assets S_1, S_2, deren Preisprozesse die folgenden stochastischen Differentialgleichungen erfüllen.

$$dS_i(t) = S_i(t)\sigma_i dW_i(t)$$

bei positiven Anfangswerten $S_i(0)$ für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$ mit positiven Konstanten σ_1, σ_2. Für die Aufgabe nehmen wir an, dass die Zinsrate r des Geldmarktkontos die Bedingung $r(t) = 0$ erfüllt. Das subjektive Maß ist also schon ein äquivalentes Martingalmaß. Weiter sind die beiden Wiener-Prozesse korreliert mit Korrelationsrate $\rho \in (-1, 1)$, i.e.

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho t$$

für alle $t \geq 0$.

Wir betrachten eine Exchange-Option, die in T die Auszahlung $C = (S_1(T) - S_2(T))^+$ liefert.

1. Berechnen Sie den arbitragefreien Preisprozeß der Exchange Option, indem Sie

$$v(t, x) = \mathbb{E}(C|S_1(t) = x_1, S_2(t) = x_2)$$

für alle $0 \leq t < T$, $x = (x_1, x_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ bestimmen.

2. Welche partielle Differentialgleichung erfüllt v

3. Bestimmen Sie eine Replikationsstrategie für C.

Aufgabe 3: Der Vasicek Prozeß 4 Punkte

Zur Modellierung einer stochastischen Zinsrate $(r(t))_{t\geq 0}$ wird angenommen, dass diese die folgende stochastische Differentialgleichung löst.

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b, \delta > 0$.

Diese Lösung nennt man Vasicek-Prozeß.

1. Bestimmen Sie die Lösung $(r(t))_{t\geq 0}$ der obigen Gleichung.
2. Bestimmen Sie $\mathbb{E}r(t), \operatorname{Var} r(t)$ für alle $t > 0$.
3. Gegen welche Verteilung konvergiert die Verteilung von $r(t)$ für t gegen ∞.
4. Bestimmen Sie die Verteilung von $\int_0^t r(s)ds$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 12.05.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145