

Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 05

05.05.2015

Aufgabe 1:

4 Punkte

Wir betrachten ein Finanzmarktmodell für eine Aktie, das durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse getrieben wird und nehmen an, dass der Aktienpreisprozeß eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma_1 dW_1(t) + \sigma_2 dW_2(t))$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ erfüllt. Weiter wird angenommen, dass es einen konstanten Geldmarktzins $r > 0$ gibt. Damit entwickelt sich das Geldmarktkonto also entsprechend $\beta(t) = \exp(rt)$ für alle $t \geq 0$. Weiter fixieren wir einen Handelszeitraum $[0, T)$.

1. Wieso ist das Modell arbitragefrei?
2. Wieso ist das Modell nicht vollständig?
3. Geben Sie einen replizierbaren Claim und eine Replikationsstrategie an.
4. Geben Sie einen Claim an, der nicht replizierbar ist.

Aufgabe 2: Ornstein Uhlenbeck Prozess

4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und W eine Wiener-Prozess mit Wiener-Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$. Ein Ornstein Uhlenbeck-Prozess ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW(t)$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = x$. Hierbei sind α, σ positive reelle Konstanten und x eine reelle Zahl.

1. Bestimmen Sie die Lösung $(X_t)_{t \geq 0}$.
2. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X_t$ und $\text{Var}X_t$ für alle $t \geq 0$.
3. Gegen welche Verteilung konvergiert die Verteilung von X_t für $t \rightarrow \infty$.
4. Bestimmen Sie die zu X gehörige Halbgruppe von Übergangskernen.

Aufgabe 3: quadriert Ornstein-Uhlenbeck Prozess

4 Punkte

Sei X ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess und damit Lösung der Gleichung

$$dX(t) = -X(t)dt + dW(t)$$

zu einem Startwert $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es einen Wienerprozess B gibt, so dass $Y(t) = X(t)^2$ die Gleichung

$$dY(t) = 1 - 2Y(t)dt + 2\sqrt{|Y(t)|}dB(t)$$

zum Anfangswert a^2 löst.

Y heißt quadrierter Ornstein-Uhlenbeck Prozess der Dimension 1.

Bestimmen Sie die zu Y gehörige Halbgruppe an Übergangskernen.