Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **28.04.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

1. Geben Sie in einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten einen Claim C, eine zulässige Handelsstrategie H und ein Anfangskapital V_0 an, so dass
$$C^* = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt, aber H keine Replikationsstrategie für C ist.

2. Geben Sie einen Finanzmarkt an, in dem ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert, so dass der abdiskontierte Preisprozeß $(S^*(t))$ kein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Seien W ein Wiener-Prozeß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathfrak{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung
$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$
für alle $0 \le t < T$ bei einem Anfangswert $S(0) > 0$. Sei weiter $\mathbb{P}^*$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichtequotientenprozeß
$$L_t = \exp(-\int_0^t \theta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds$$
für alle $0 \le t \le T$ für einen vorhersehbaren Prozeß θ, der $\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty$ erfüllt. Schließlich sei $S^*(t) = \exp(-\int_0^t r(s)ds)S(t)$ definiert für alle $0 \le t < T$ mit $r(t) = \mu(t) - \theta(t)\sigma(t)$.

1. Bestimmen Sie einen vorhersehbaren Prozeß $H(t)_{0\le t<T}$ und ein Anfangskapital V_0, so dass
$$\frac{1}{L_T} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.

2. Ist θ eine deterministische Funktion, so bestimmen Sie für $\gamma > 0$ einen vorhersehbaren Prozeß $H(t)_{0\le t<T}$ und ein Anfangskapital V_0, so dass
$$\frac{1}{L_T^\gamma} = V_0 + \int_0^T H(t)dS^*(t)$$
gilt.

Hinweis: Was für eine Bedeutung hat $(\frac{1}{L(t)})$ für $\mathbb{P}^*$. Was ist $\mathbb{E}^*((\frac{1}{L(t)})^\gamma|\mathfrak{F}_t)$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n-dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0,T)$, ein Bankkontoprozeß β der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

und ein positiver Aktienpreisprozeß $(S(t))_{0\leq t\leq T}$ mit stetigen Pfaden, so dass die Voraussetzungen an einen Finanzmarkt der Vorlesung erfüllt sind.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ existiert und das der abdiskontierte Preisprozeß $(S^*(t))$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist bezüglich $\mathbb{P}^*$.

Zeigen Sie, dass es zu $\mathbb{P}^*$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T)-K)^+}{\beta(T)} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - KB(0,T)\mathbb{P}_2^*(S_T > K),$$

wobei $B(0,T) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}$.

Welche Bedeutung hat $\mathbb{P}_1^*$?

Abgabe: Die. 28.04.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145