Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **21.04.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $T \in (0, \infty]$ und M ein nach unten beschränktes stetiges lokales Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t<T}$. Zeigen Sie:

1. M ist ein Supermartingal, dass punktweise für $t \to T$ gegen eine $\mathfrak{F}_T$-messbare Zufallsvariable M_T konvergiert.

2. Gilt $\mathbb{E}M_T = \mathbb{E}M_0$, so ist M ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(M_t)_{t<T}$ ein stetiges lokales Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t<T}$. Zeigen Sie:

1. Ist $\mathbb{E}\langle M\rangle_T < \infty$, so ist M ein $\mathcal{H}_2$-Martingal.

2. M konveriert punktweise auf dem Ereignis $\{\langle M\rangle_T < \infty\}$ gegen eine $\mathfrak{F}_T$ messbare reelle Zufallsvariable M_T.

Hinweis: Betrachten Sie für $C > 0$ die Stopzeit $\tau_C = \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t \geq C\}$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien μ und σ previsible Prozesse mit $\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Seien W ein Wierner-Prozeß und S eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

mit Anfangswert ζ. Sei weiter Z eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ(t) = Z(t)(\mu(t)dt + |\sigma(t)|dW(t))$$

mit gleichem Anfangswert ζ.

Zeigen Sie, dass S und Z die gleiche Verteilung haben.

Aufgabe 4: Aktienmartingalmaß 4 Punkte

Wir betrachten einen durch einen eindimensionalen Wiener-Prozeß getriebenen Finanzmarkt, der die Forderungen der Vorlesung erfüllt. Der Aktienpreisprozess kann somit durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

und das Geldmarktkonto durch

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt$$

beschrieben werden. Zeigen Sie, dass es ein äquivalentes Martingalmaß gibt genau dann, wenn es ein sogenanntes Aktienmartingalmaß gibt.

Ein Aktienmartingalmaß ist ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$, so dass $(\frac{\beta(t)}{S(t)})_{t<T}$ ein lokales Martingal bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ definiert.

Abgabe: Die. 28.04.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145