Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 02** **14.04.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein von einem eindimensionalen Wiener-Prozess getriebenes Semimartingalmodell entsprechend der Vorlesung über einen Zeitraum $[0, T)$. Zu einer Handelsstrategie (H, K) mit strikt positivem Vermögensprozess V wird zur Zeit t der Aktienanteil $\pi(t)$ am Vermögen definiert durch

$$\pi(t) = \frac{H(t)S(t)}{V(t)}$$

für alle $0 \leq t < T$. Der im Geldmarktkonto zur Zeit t investierte Vermögensanteil ist dann gegeben durch

$$1 - \pi(t) = \frac{K(t)\beta(t)}{V(t)}$$

für alle $0 \leq t < T$.

Zeigen Sie:

1. Ist (H, K) eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit strikt positivem Vermögensprozess V, so erfüllt V die stochastische Differentialgleichung

   $$dV(t) = V(t)\big((r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t)))dt + \pi(t)\sigma(t)dW(t)\big)$$

   für alle $0 \leq t < T$ mit Anfangsbedingung $V_0 = H(0)S_0 + K(0)$. Für den abdiskontierten Vermögensprozess V^* gilt dann

   $$dV^*(t) = V^*(t)\big(\pi(t)(\mu(t) - r(t))dt + \pi(t)\sigma(t)dW(t)\big)$$

   für alle $0 \leq t < T$.

2. Ist $(\pi(t))_{0\leq t<T}$ ein vorhersehbarer Prozess mit $\int_0^t \pi^2(s)\sigma^2(s)ds < \infty$ und $\int_0^t |\pi(s)|(|r(s)|+|\mu(s)|ds) < \infty$ für alle $0 \leq t < T$, so sind die obigen stochastischen Differentialgleichungen für V und V^* eindeutig für alle Startwerte $x > 0$ lösbar. Wie kann man aus der Lösung eine selbstfinanzierende Handelsstrategie konstruieren, deren Vermögensentwicklung mit der Lösung übereinstimmt.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit variabler deterministischer Volatilität σ und Zinsrate r über einen Handelszeitraum $[0, T]$. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hat der Aktienpreisprozess eine Darstellung der Form

$$S_t = xe^{\int_0^t r(s)ds} \exp\Big(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds\Big), 0 \leq t \leq T$$

mit einem Wiener-Prozeß W bezüglich $\mathbb{P}^*$. Der Anfangspreis werde hier mit $x > 0$ bezeichnet. Die Entwicklung des Bankkontos ist gegeben durch

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds), 0 \leq t \leq T.$$

Zeigen Sie:

1. Für $0 \leq t \leq T$ und $\alpha > 0$ ist

$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}|\mathfrak{F}_t) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds} \exp(\int_0^t \alpha\sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha\sigma(s))^2 ds).$$

2. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}.$$

3. Für jedes $\alpha > 0$ und $K > 0$ betrachten wir den Power Call, dessen Auszahlung in T gegeben ist durch

$$C = (S_T^\alpha - K)^+.$$

   Verifizieren Sie für $p(C) = \mathbb{E}^* C/\beta(T)$ die folgende Formel

$$\begin{aligned} p(C) &= h(T)\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \int_0^T \alpha(r(s)+\sigma^2(s)(\alpha-\frac{1}{2}))ds}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right) \\ &\quad -Ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \alpha\int_0^T (r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)ds)}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right) \end{aligned}$$

   mit $h(T) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}$.

Aufgabe 3: Bayes-Formel 4 Punkte

Es seien $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathfrak{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ eine Filtration. Weiter sei $\bar{\mathbb{P}}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W-Maß auf $\mathfrak{F}_T$. Bezeichne für $t \in [0,T]$ mit L_t eine Radon-Nikodym-Dichte von $\bar{\mathbb{P}}_{|\mathfrak{F}_t}$ bzgl. $\mathbb{P}_{|\mathfrak{F}_t}$. Dann gilt für jede $\bar{\mathbb{P}}$-integrierbare, $\mathfrak{F}_T$ - messbare Zufallsgröße X

$$\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}(X|\mathfrak{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T X|\mathfrak{F}_t)}{L_t}, \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Folgern Sie hieraus:

Ein Prozess N ist ein lokales $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal genau dann, wenn NL ein lokales $\mathbb{P}$-Martingal ist.

Abgabe: Die. 21.04.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145