Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **16.06.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit zwei Aktien entsprechend Aufgabe 2 Blatt 06. Die Preisprozesse S_1, S_2 erfüllen also

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sigma_i dW_i(t)$$

bei positiven Anfangswerten $S_i(0)$ für $i = 1, 2$ und $0 \leq t < T$ mit positiven Konstanten σ_1, σ_2 und reellen Driftkonstanten μ_1, μ_2. Für die Aufgabe nehmen wir an, dass die Zinsrate r des Geldmarktkontos die Bedingung $r(t) = 0$ erfüllt. Weiter sind die beiden Wiener-Prozesse korreliert mit Korrelationsrate $\rho \in (-1, 1)$, i.e.

$$\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho t$$

für alle $t \geq 0$.

Führen Sie einen zur Vorlesung analogen alternativen PDE Ansatz durch, um einen Δ-Hedge und eine PDE zu bestimmen, die die Preisfunktion der Exchangeoption erfüllt. Dabei ist die Exchangeoption das Derivat, dass in T die Auszahlung $C = (S_1(T) - S_2(T))^+$ liefert.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit einem risky asset und einem Geldmarktkonto, der die Annahmen der Vorlesung erfüllt. Es gilt also

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt$$

und

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)).$$

Sei $V(t)_{0 \leq t < T}$ der Wertprozeß einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie (K, H). Es gilt also

$$V(t) = V(0) + \int_0^t K(s)d\beta(s) + \int_0^t H(u)dS(u)$$

für alle $t > 0$.

Was können Sie über K, H und V aussagen, wenn V fast sicher Pfade von beschränkter Variation hat?

Aufgabe 3: 4 Punkte

In einem Vasicek Bondmarktmodell nimmt man für die short rate Entwicklung eine Dynamik der Form

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b > 0$ an bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

1. Zeigen Sie, dass dann eine arbitragefreie Familie von Bondpreisen gegeben ist durch $B(t,T) = v(t, r(t), T)$ mit

$$v(t, r, T) = \exp(-h(T-t) - r(t)g(T-t))$$

2. Besimmen Sie die Funktionen g, h .

3. Geben Sie die stochastische Differentialgleichung an, die der T- Bond $B(t,T)$ als Prozeß in t erfüllt.

Abgabe: Die. 23.06.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145