Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2015

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 01** **07.04.2015**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien $T > 0$ und $(W_t)_{0 \le t < T}$ ein Wiener-Prozeß bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{0 \le t < T}$. Sei weiter $\sigma : [0, T) \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion mit $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $0 \le t < T$. Zeigen Sie:

1. $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ ist stochastische unabhängig von $\mathfrak{F}_t$ für alle $t, h \ge 0$ mit $t + h < T$.
2. Durch $L_t = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$ für alle $0 \le t < T$ wird ein Martingal definiert.

Hinweis: Sie können hierbei ohne Beweis benutzen, dass $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ eine $N(0, \int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds)$-verteilte Zufallsvariable ist. Wie könnte man dies denn beweisen?

Aufgabe 2: Black-Scholes Modell mit deterministischen Koeffizienten 4 Punkte

In einem Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilität erfüllt der Aktienpreisprozeß $(S_t)_{0 \le t < T}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)), 0 \le t < T$$

mit Startwert S_0. Die Koeffizienten μ und σ werden hierbei als deterministische meßbare Funktionen vorausgesetzt, die $\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty$ und $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ erfüllen.

Für das Geldmarktkonto wird eine deterministische Verzinsung mit Rate $r : [0, T) \to \mathbb{R}$ angenommen, so dass $\int_0^t |r(s)|ds < \infty$ für alle $0 \le t < T$ erfüllt ist. Der Preisprozeß des Geldmarktkontos erfüllt also $\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$ für alle $t < T$.

Überlegen Sie sich, welche Voraussetzung die Funktionen r, μ, σ erfüllen muss, damit es ein zu $\mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ gibt, so dass $(\frac{S(t)}{\beta(t)})_{0 \le t < T}$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}^*$ ist.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Girsanov an.

Aufgabe 3: Preisfunktion einer Calloption 4 Punkte

Wir betrachten in der Situation von Aufgabe 2 den risikoneutralen Fall, in dem die Driftfunktion μ der Aktie mit der Zinsratenfunktion r des Geldmarktkontos übereinstimmt. Es gilt also

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

1. Berechnen Sie den arbitragefreien Preis zur Zeit t einer Calloption mit strike K zum Ausübungszeitpunkt T, i.e.

$$v(t, y) = \mathbb{E}\big(\exp(-\int_t^T r(s)ds)(S_T - K)^+ | S(t) = y)$$

für alle $0 \leq t < T$ und $y > 0$. Als Lösung ergibt sich

$$v(t,y) = y\Phi(\frac{\log\frac{y}{K} + \int_t^T r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}) - Ke^{-\int_t^T r(s)ds}\Phi(\frac{\log\frac{y}{K} + \int_t^T r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}})$$

2. Zeigen Sie, dass die Preisfunktion $v(t,y)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t v + r(t)y\partial_y v + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\partial_y^2 v = r(t)v$$

auf $[0,T) \times (0,\infty)$ erfüllt mit Randbedingung

$$\lim_{t\to T} v(t,y) = (y-K)^+$$

für alle $y > 0$.

Hinweis: Sie können den ersten Teil ohne großartige Rechnung mit Hilfe einer geschickten Anwendung des Satzes von Girsanov zeigen. Den zweiten Teil können sie vom Prinzip durch Einsetzen ausrechnen. Sie können aber auch mit der Ito-Formel argumentieren, da $(\exp(-\int_0^t r(s)ds)v(t,S(t)))_{t<T}$ ein Martingal ist.

Abgabe: Die. 14.04.2015 bis spätestens 11.00 im Fach 145