Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 9

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $R(0,1)$-verteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{e} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 34 (4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$P(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{2} = P(X_n = -n^\alpha)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \geq 1$ gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen nicht.

b) Für $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ gilt der zentrale Grenzwertsatz.

Aufgabe 35 (4 Punkte)

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mu := EX_1$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}X_1 < \infty$. Ferner sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\mu^2}{\overline{X}_n} - \overline{X}_n\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2), \quad \text{falls } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden (Satz von Slutsky): Aus $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ folgt $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, c)$ für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times (c - \eta, c + \eta) \in \mathcal{C}(f)$ für ein $\eta > 0$.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}^{X_n} = \mathcal{N}(0, n!), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Zentrale Grenzwertsatz gilt, die Lindeberg-Bedingung aber nicht erfüllt ist.

Aufgabe 36 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Folge poisson-verteilter Zufallsvariablen.

Abgabetermin: Donnerstag, 26.6.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.