

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 8

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Geben Sie eine Familie von Zufallsvariablen an, die zwar paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Starke Gesetz der Großen Zahlen für Folgen von i.i.d. Zufallsvariablen $(X_n)_n$ mit endlichen vierten Momenten, d.h. $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$. Benutzen Sie hierbei **nicht** die Aussage des Starken Gesetzes der großen Zahlen nach Etemadi (Theorem 13.3).

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_n$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Zeigen Sie, dass dann das Schwache Gesetz der großen Zahlen gilt, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E}X_1 \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

Benutzen Sie hierbei **nicht** die Aussage des Starken Gesetzes der großen Zahlen.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ und weiter $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- Bestimmen Sie $E\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right)$.
- Zeigen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \text{Var}(X_1)$ *P*-f.s.

Abgabetermin: Freitag, 20.6.2014 bis 8:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.