

## Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

### Blatt 7

#### Aufgabe 25 (4 Punkte)

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  zwei W-Maße mit  $\lambda^d$ -Dichten  $f$  bzw.  $g$ .

- Zeigen Sie, dass  $\mu * \nu$  die  $\lambda^d$ -Dichte  $(f * g)(x) := \int f(x - y)g(y)\lambda^d(dy)$  besitzt.
- Nun sei  $\mu$  die Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  und  $\nu = Poi(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ . Bestimmen Sie die Lebesgue-Dichte von  $\mu * \mu$  und  $\nu * \nu$  sowie die Verteilungsfunktion von  $\mu * \nu$ .

#### Aufgabe 26 (4 Punkte)

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{A}$ . Zeigen Sie:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) = \infty$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ .
- Für alle  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) < \infty$  gilt  $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(A)$ .

#### Aufgabe 27 (4 Punkte)

Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, Q)$ , wobei  $Q$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  sei. Weiter sei  $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  mit  $S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  der Shift-Operator und schließlich  $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} : S^{-1}(A) = A\}$  das System der shift-invarianten Mengen. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  für alle  $A \in \mathcal{I}$  gilt.

#### Aufgabe 28 (4 Punkte)

- Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Dann gilt mit dem Borel-Cantelli-Lemma

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty \Rightarrow X_n \rightarrow 0 \quad \mathbb{P} - f.s.$$

Gilt die Umkehrung dieser Implikation? Beweisen Sie Ihre Aussage.

- Seien die Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus Aufgabenteil (a) zusätzlich unabhängig. Gilt dann die Umkehrung der Implikation aus (a)? Beweisen Sie Ihre Aussage.

**Abgabetermin:** Donnerstag, 5.6.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.