Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 6

Aufgabe 21 (4 Punkte)
Es seien X, Y und Z Zufallsgrößen. Die Notation “$X \perp Y$” stehe abkürzend für “X und Y sind stochastisch unabhängig”. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $X \perp Y \Longleftrightarrow X^2 \perp Y^2$.

b) $X \perp Y, X \perp Z \Longleftrightarrow X \perp (Y, Z)$.

c) $X \perp Y, Y \perp Z \Longrightarrow X \perp Z$.

d) $X \perp (Y, Z), Y \perp Z \Longleftrightarrow X, Y$ und Z sind stochastisch unabhängig.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Folgen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsgrößen auf Konvergenz in Verteilung:

(i) $X_n \sim Poi(\alpha_n), n \geq 1,$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$

(ii) $X_n \sim Poi(\alpha_n), n \geq 1,$ mit $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty.$

(b) Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängige und auf $[0, 1]$ rechteckverteilte Zufallsvariablen. Untersuchen Sie $Y_n := \ n \min_{1 \leq j \leq n} X_j$ auf Konvergenz in Verteilung.

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein $A \in \mathcal{F}$ stets unabhängig von $\emptyset$ sowie von Ω. Existiert kein unabhängiges Paar $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ mit $A, B \notin \{\Omega, \emptyset\}$, so nennen wir den Raum *unabhängigkeitsfrei*. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(\{k\}) = 2^{-k!} \text{ für } k \geq 2 \quad \text{ und } \quad \mathbb{P}(\{[1\}) = 1 - \sum_{k\geq 2} \mathbb{P}(\{k\})$$

unabhängigkeitsfrei ist.

Hinweis: Eine mögliche Beweisstrategie besteht darin, die Annahme, dass es zwei unabhängige Mengen A und B gibt, die nicht trivial sind, zum Widerspruch zu führen.

Warum kann man für solche Mengen A und B O.B.d.A annehmen, dass $1 \notin A \cup B$?
Sei

$$k_A := \min\{k \in A\}, \quad k_B := \min\{k \in B\}, \quad k_{AB} := \min\{k \in A \cap B\}.$$

Zeigen Sie:

$$2^{-k_{AB}!} \leq 2 \cdot 2^{-k_A! - k_B!}, \quad 2 \cdot 2^{-k_{AB}!} \geq 2^{-k_A! - k_B!}$$

unter Verwendung der Unabhängigkeit von A und B und der (ebenfalls zu zeigenden Ungleichung)

$$\sum_{k>N} 2^{N! - k!} \leq \frac{1}{4}, \quad \textit{für } N \geq 2.$$

Leiten Sie dann den gesuchten Widerspruch her.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
Seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ W-Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$. Überprüfen Sie, ob schwache Konvergenz vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

(a) $\mu_n = f_n \lambda \quad \text{mit } f_n(x) = (1 - \cos(2\pi n x))\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

(b) $\mu_n = \mathit{Unif}[-n, n]$

(c) $\mu_n = \mathcal{N}(\mu, \frac{1}{n}), \quad \mu \in \mathbb{R}$

(d) $\mu_n = \mathcal{N}(0, n)$

Abgabetermin: Freitag, 30.5.2014 bis 8:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.