Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 5

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f, g zwei $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen auf Ω. Zeigen Sie:

(a) $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

(b) $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und μ endlich $\Rightarrow \lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

Hinweis: *Hierbei ist*

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ ist messbar und } \mu\text{-f.ü beschränkt}\}$$

und

$$\|f\|_\infty := \textit{ess-sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{N \in \mathcal{A}, \mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|.$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Seien μ und ν endliche Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass es Maße ν_1, ν_2 auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gibt mit $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_1 \ll \mu$ und $\nu_2 \perp \mu$. Dabei ist ν_2 singulär bezüglich μ (in Zeichen $\nu_2 \perp \mu$), wenn es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\mu(N) = 0 = \nu_2(N^c)$.

Hinweis: *Betrachten Sie zunächst das System aller μ-Nullmengen*

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A) = 0\} \quad \text{und} \quad \alpha := \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Warum gilt $\alpha < \infty$? Warum gibt es eine monoton wachsende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{N}_\mu$ mit

$$\nu(A_n) \nearrow \alpha \quad \text{und} \quad \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \alpha.$$

Zeigen Sie, dass die mit $N := \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ definierten Maße

$$\nu_1(A) := \nu(A \cap N^C), \quad \nu_2(A) := \nu(A \cap N), \quad A \in \mathcal{A}$$

die gewünschten Eigenschaften haben.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei das Dirac-Maß δ_x auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ definiert durch

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{B}^1$. Zeigen Sie, dass δ_x keine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ besitzt.

(b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $A_0 \in \mathcal{A}$. Sei das Maß ν auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben durch $\nu(A) = \mu(A \cap A_0)$ für $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, $\nu \ll \mu$ und geben Sie eine Dichte f von ν bzgl. μ an.

(c) Es seien ν, μ Maße auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Es gelte

$$\nu(A) \leq \mu(A) \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

Sei weiter μ σ-endlich. Zeigen Sie, dass ν eine Dichte f bezüglich μ besitzt, für die gilt $0 \leq f(x) \leq 1$ μ-f.s..

Aufgabe 20 (4 Punkte)
Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsgröße und $c > 0$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq c) \leq \frac{\mathbb{V}(X)+t^2}{(c+t)^2}$ für alle $t \geq 0$.

(b) $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq c) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{c^2+\mathbb{V}(X)}$.

Abgabetermin: Donnerstag, 22.5.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.