Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 4

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $g : \Omega \times Q \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $g(\cdot, t)$ ist μ-integrierbar für alle $t \in Q$,

(ii) $g(\omega, \cdot)$ ist differenzierbar für μ-fast alle $\omega \in \Omega$,

(iii) es gibt eine μ-integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|\frac{\partial}{\partial t} g(\cdot, t)| \leq h$ für alle $t \in Q$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $G : Q \to \mathbb{R}$, $G(t) = \int g(\omega, t)\mu(d\omega)$, differenzierbar ist mit

$$G'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} g(\omega, t)\mu(d\omega).$$

Aufgabe 14 (4 Punkte)

(a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine stetig differenzierbare nicht negative Funktion mit kompaktem Träger und $c := \int h d\mu > 0$. Sei

$$f(x,t) := t\, h(x - \frac{1}{t}), \quad f(x,0) := 0, \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass man die partielle Ableitung nach t nicht mit der Integration vertauschen kann, d.h. die Aussage

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} f(x,t)\, \lambda(dx) = \frac{d}{dt} \int f(x,t)\, \lambda(dx) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist falsch. Warum steht dies nicht im Widerspruch zu Aufgabe 13?

(b) Zeigen Sie, dass für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} x f(x) \chi_{[-n,n]}(x) d\lambda = 0.$$

(c) Berechnen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda$ für $f_n(x) := \chi_{[0,1]}(x) \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die uneigentlich Riemann-, aber nicht λ-integrierbar ist.

(b) Geben Sie eine Funktion an, die λ-, aber nicht Riemann-integrierbar ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & x \geq 0,\ x \leq y < x+1 \\ -1, & x \geq 0, x+1 \leq y < x+2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

$$\int \int f(x,y)\ \lambda(dy)\lambda(dx) \neq \int \int f(x,y)\ \lambda(dx)\lambda(dy).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 15.5.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.