Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 3

Aufgabe 9 (4 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f : \Omega \to [0, \infty)$ μ-integrierbar und $\nu(A) := \int_A f d\mu$, $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) ν ist ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) ν ist μ-stetig, d.h. aus $\mu(N) = 0$ für ein $N \in \mathcal{A}$ folgt $\nu(N) = 0$.

c) Für alle $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrierbar gilt $\int_A g d\nu = \int_A g \cdot f d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine numerische Funktion f folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist μ-integrierbar.

b) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion g, so dass $|f| \le g$ gilt.

c) $|f|$ ist μ-integrierbar.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Weiter konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx,$$

wobei hier die auftretenden Integrale Riemann-Integrale sind.

b) Geben Sie einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von μ-integrierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ an, die jeweils punktweise gegen Null konvergieren, und für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = 1.$$

Aufgabe 12 (4 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\mu)$ und f_n konvergiere gleichmäßig gegen f. Zeigen Sie, dass dann auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass die Endlichkeit von μ in Aufgabenteil a) notwendig ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 8.5.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.