Institut für Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 2

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn

$$\forall I \subset \mathbb{R}, (A_i)_{i \in I} \text{ abgeschlossen}, J \subset I \text{ mit } |J| < \infty : \bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, d.h. $\mu(\mathbb{R}) = 1$, und sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gegeben durch $f(x) := x^2$.

a) Geben Sie die minimale σ-Algebra $\sigma(f)$ an, unter der f $\sigma(f)$-$\mathcal{B}_{[0,\infty)}$-messbar ist.
Bemerkung: $\sigma(f)$ heißt auch von f erzeugte σ-Algebra.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Bildmaßes $f(\mu)$.

Bemerkung: $\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ ist die Borelsche σ-Algebra auf der nichtnegativen Halbachse, d.h. die **Spur-σ-Algebra** $\mathcal{B}_{[0,\infty)} = \{B \cap [0, \infty) | B \in \mathcal{B}\}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar ist.

b) Es seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i \in \{1, 2, 3\}$, messbare Räume und $T_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $T_2 : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $T_2 \circ T_1$ dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbar ist.

c) Es sei μ ein Maß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$. Zeigen Sie, dass für die Bildmaße gilt

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu)).$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Sei $d \in \mathbb{N}$ und es bezeichne λ^d das d-dimensionalen Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$.

a) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ abzählbar. Zeigen Sie, dass A Borel-messbar ist mit $\lambda^d(A) = 0$.

a) Sei H eine m-dimensionale Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ mit $m < d$. Zeigen Sie $\lambda^d(H) = 0$.

Abgabetermin: Freitag, 2.5.2014 bis 8:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.