Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 11

Aufgabe 41 (4 Punkte)

(a) Es sei X eine integrierbare Zufallsgröße und $\mathcal{C}$ eine Sub-σ-Algebra der zu Grunde liegenden σ-Algebra. Zeigen Sie (ohne Benutzung von Theorem 3.13), dass aus der Unabhängigkeit von X und $\mathcal{C}$ bereits $\mathbb{E}(X|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X)$ folgt.

(b) Es seien X_1 und X_2 zwei $B(1;p)$-verteilte Zufallsgrößen, wobei $p \in (0,1)$. Sei weiter $p_{ij} := P(X_2 = j | X_1 = i)$ für alle $i, j \in \{0,1\}$. Bestimmen Sie eine Version von $\mathbb{E}(X_2|X_1)$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Funktion um eine λ^2-Dichte handelt:

$$f(x,y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-y^2 \frac{(x-y)^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times[1,\infty)}(x,y).$$

(b) Es sei (X,Y) ein Zufallsvektor mit der λ^2-Dichte f aus Teil a). Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = y \quad \mathbb{P}^Y\text{-f.s.}$$

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Es sei $X : ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda_{[0,1)}) \longrightarrow ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)})$ eine stetige, beschränkte, messbare Funktion und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right)\right)$$

eine aufsteigende Folge von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{B}_{[0,1)}$. Bestimmen Sie $E(X|\mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} E(X|\mathcal{F}_n)$.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$, $X \in \mathcal{L}^2(\mathcal{A})$ und

$$\operatorname{Var}(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2)|\mathcal{F})$$

die *bedingte Varianz* von X unter $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

(a)
$$\operatorname{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}\left(X^2|\mathcal{F}\right) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2$$

(b)
$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\Big(\operatorname{Var}(X|\mathcal{F})\Big) + \operatorname{Var}\Big(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})\Big)$$

Abgabetermin: Donnerstag, 10.7.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.