Institut für
Mathematische Statistik

Löwe/Schubert
SS 2014

Übungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Es seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}\}$.

   i) Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ und das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$.

   ii) Geben Sie zwei verschiedene W-Maße P_1, P_2 auf $\sigma(\mathcal{E})$ an, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen.

b) Es seien Ω und Ω' zwei Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A}' := \{A' \subset \Omega' \,|\, T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über Ω' bildet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für $\Omega = \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{A}_0 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$$

und zwei Mengenfunktionen $\mu_1 : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_0 \to [0, 1]$ gegeben durch

$$\mu_1(A) := |A| \qquad \text{und} \qquad \mu_2(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

a) Wie sieht die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$ aus?

b) Lassen sich μ_1 und/oder μ_2 zu Maßen auf $\mathcal{A}$ fortsetzen? Wenn ja, wie sieht dieses Maß aus, wenn nein, wieso nicht?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ und μ ein Volumen über $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

b) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

c) $A \subset B,\ \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

d) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

e) Falls die $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ gilt, so ist außerdem $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei

$$\mathcal{J}^d := \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}^d$ ein Ring über $\mathbb{R}^d$ ist, wobei

$$\mathcal{F}^d := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i,\ n \in \mathbb{N},\ \mathcal{J}_i \in \mathcal{J}^d \right\}.$$

b) Sei $F \in \mathcal{F}^d$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{J}^d$ gibt mit $F = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{J}_i$.

Abgabetermin: Donnerstag, 24.4.2014 bis 12:00 Uhr in den Briefkästen 133–136.