Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 11** **24.06.2014**

Aufgabe 1: Bewertung von Swaps 4 Punkte

Wir betrachten einen Payer-Swap mit Tenorstruktur $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ auf ein Nominal N, der feste Zinsen R in Variable tauscht. Zeigen Sie, dass der Wert $PS(t)$ des Payer-Swaps in $t \leq t_0$ gegeben ist durch

$$PS(t) = NB(t, t_0) - (N \sum_{i=1}^{n} B(t, t_i) R(t_i - t_{i-1}) + NB(t, t_n)).$$

Zeigen Sie ferner, dass auch eine Darstellung der Form

$$PS(t) = \sum_{i=1}^{n} N(t_i - t_{i-1}) B(t, t_i)(F(t; t_{i-1}, t_i) - R)$$

möglich ist.

Interpretieren Sie beide Bewertungsmöglichkeiten.

Aufgabe 2: 4 Punkte

In einem Vasicek Bondmarktmodell nimmt man für die short rate Entwicklung eine Dynamik der Form

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b > 0$ an bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

1. Zeigen Sie, dass dann eine arbitragefreie Familie von Bondpreisen gegeben ist durch $B(t, T) = v(t, r(t), T)$ mit

$$v(t, r, T) = \exp(-h(T - t) - rg(T - t))$$

2. Besimmen Sie die Funktionen g, h .

3. Geben Sie die stochastische Differentialgleichung an, die der T- Bond $B(t, T)$ als Prozess in t erfüllt.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Im Cox Ingersoll Ross Modell erfüllt die short rate $(r(t))_{t\geq 0}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta\sqrt{r(t)}dW(t)$$

mit einem Wiener-Prozess W und Konstanten $b, a, \delta > 0$, die $2ab \geq \delta^2$ erfüllen. Zeigen Sie

1. $\mathbb{E}\, r(t) = e^{-bt} r_0 + (1 - e^{-bt})a,$
2. $\operatorname{Var} r(t) = \frac{\delta^2}{b} r_0(e^{-bt} - e^{-2bt}) + \frac{\delta^2 a}{2b}(1 - e^{-bt})^2$.

Abgabe: Die. 01.07.2013 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131