Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 10** **17.06.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten bezüglich einer Aktie, i.e.

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^*(t)) \quad , S(0) = S_0$$

bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

Zeigen Sie, wie Sie mit einem PDE Ansatz eine Hedgestrategie für einen asiatischen Call ausrechnen können. Dieser hat die Auszahlung $C = (\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du - K)^+$ zur Fälligkeit T.

Aufgabe 2: 6 Punkte

In einem stochastischen Volatilitätsmodell nach Heston haben unter dem äquivanten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ der Aktien-und Volatilitätsprozess die Dynamik

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + \sqrt{Y(t)}dW_1^*(t)) \quad , \\ dY(t) &= a(b - Y(t))dt + \delta\sqrt{Y(t)}dW_2^*(t) \end{aligned}$$

Für eine Calloption mit Basis K und Fälligkeit T ist in der Vorlesung gezeigt worden, dass der Anfangspreis die Gleichung

$$\mathbb{E}^* e^{-rt}(S(T) - K)^+ = S_0\mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(S(T) > K)$$

erfüllt.

Führen Sie einen PDE Ansatz durch, der die Fouriertransformierte von $X_T = \log(S(T))$ bezüglich $\mathbb{P}_1^*$ bestimmt.

Aufgabe 3: Hull White Volatilitätsmodell 6 Punkte

Das stochastische Volatilitätsmodell nach Hull White hat bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ die Darstellung

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + Y(t)dW_1(t)), \\ dY(t) &= Y(t)(\mu dt + \delta dW_2(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

mit unabhängigen Wienerprozessen W_1, W_2.

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung.

2. Wird $\mathbb{P}^*$ als Bewertungsmaß gewählt, so versuchen Sie eine Formel für den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit T und Basis K zu finden.

3. Formulieren Sie einen PDE Ansatz mit dem der Preis der Calloption berechnet werden kann.

Gehen Sie bei diesem Modell von einer konstanten Zinsrate $r > 0$ aus.

Abgabe: Die. 24.06.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131