Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 08** **26.05.2014**

Aufgabe 1: Put Call Symmetrie von Carr 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten bezüglich einer Aktie. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ erfüllt der Aktienpreis also die Dynamik

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^*(t)) \qquad S(0) = S_0 > 0$$

für $0 \leq t \leq T$, wobei $r \in \mathbb{R}$ die konstante Zinsrate und $\sigma > 0$ die konstante Volatilität bezeichnen. Den Anfangspreis eines Calls bzw. Puts mit Basis K und Laufzeit T bezeichnen wir mit $C(K,T)$ bzw. $P(K,T)$. Der sogenannten Forwardpreisprozess M der Aktie zum Termin T ist definiert durch

$$M_t = S_t e^{r(T-t)}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.

Definiere das sogenannte Aktienmartingalmaß $\mathbb{M}$ durch

$$\frac{d\mathbb{M}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathfrak{F}_T} = \frac{M(T)}{M(0)}.$$

Zeigen Sie:

1. Die Verteilung von $\frac{M_T}{M_0}$ unter $\mathbb{P}^*$ ist gleich der Verteilung von $\frac{M_0}{M_T}$ unter $\mathbb{M}$
2. Folgern Sie hieraus die nicht offensichtliche Symmetrie von Carr, welche lautet

$$C(K,T) = P(\frac{M_0^2}{K}, T)$$

Aufgabe 2: Put Carr Symmetrie bei lokaler Volatilität 4 Punkte

Anstelle des Black-Scholes Modells in Aufgabe 1 wird eine Aktie mit lokaler Volatilität betrachtet, i.e.

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma(t, S_t))dW^*(t)$$

bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

Wir nehmen an, dass für jedes $0 \leq t < T$ die Funktion $x \to \sigma(e^x, t)$ gerade in x ist.

Zeigen Sie, dass dann auch die Symmetrie von Carr gilt, i.e.

$$C(K,T) = P(\frac{M_0^2}{K}, T)$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell für zwei Aktien mit deterministischen Koeffizienten. Die Aktienpreisprozesse erfüllen also

$$\begin{array}{rcl} dS_1(t) & = & S_1(t)(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_1(t) + \sigma_{12} dW_2(t)) \\ dS_2(t) & = & S_2(t)(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_1(t) + \sigma_{22} dW_2(t)) \end{array} \quad ,$$

mit Anfangsbedingung $S_1(0) = x_1 > 0, S_2(0) = x_2 > 0$, Driftvektor $\mu \in \mathbb{R}^2$ und Volatilitätsmatrix σ, die als invertierbar angenommen wird.

Wir betrachten weiter einen T-Claim, der zum Zeitpunkt T eine Auszahlung der Form $C = h(S_T)$ verursacht und nehmen an, dass diese unter dem äquivalenten Martingalmaß einen endlichen Erwartungswert hat.

1. Bestimmen Sie eine partielle Differentialgleichung, die die Preisfunktion

   $$v(t,x) = \mathbb{E}^*(h(S_T)e^{-r(T-t)} | S_1(t) = x_1, S_2(t) = x_2)$$

   für alle $t < T, x \in (0,\infty)^2$ erfüllt.

2. Wie können Sie die Lösung benutzen, um eine Hedgestrategie zu bestimmen. Dabei wird ein Hedge bestimmt durch einen previsiblen Prozess $H = (H_1, H_2)$ derart, dass

   $$e^{-rT}C = e^{-rT}\mathbb{E}^*C + \int_0^T H_1(t) dS_1^*(t) + \int_0^T H_2(t) dS_2^*(t).$$

3. Bestimmen Sie für den Fall $g(x) = (x_1 - K)^+$ die Preisfunktion und Hedgestrategie.

4. Bestimmen Sie für den Fall $g(x) = (x_1 - x_2)^+$ die Preisfunktion und Hedgestrategie.

Abgabe: Die. 03.06.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131