Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2014

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 07** **20.05.2014**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist, wenn für jedes $\delta > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \delta) \longrightarrow 0$$

strebt für $n, m \to \infty$.

Hinweis: Die Topologie der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist metrisierbar. Eine Metrik, die die Topolgie erzeugt ist gegeben durch $d(X, Y) = \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1)$.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Gegeben sei ein Finanzmarkt, der die NFLVR Bedingung erfüllt. Wir definieren entsprechend der Vorlesung $\mathfrak{K} = \{\int_0^T H(u)dS^*(u) : H \text{ zulässig } \}$.

Sei $K \in \mathfrak{K}$ mit $K = \int_0^T H(u)dS^*(u)$.

Zeigen Sie, dass

$$||(\int_0^t H(u)dS^*(u))^-||_\infty \leq ||(\int_0^T H(u)dS^*(u))^-||_\infty$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gilt.

Folgern Sie hieraus, dass aus $K \geq -x$ für ein $x > 0$ gefolgert werden kann, dass $\int_0^t H(u)dS^*(u) \geq -x$ gilt für alle $0 \leq t \leq T$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten für zwei Aktien bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes in der Form

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)rdt \quad , \\ dS_1(t) &= S_1(t)(rdt + \sigma_1 dW_1(t)) \quad , \\ dS_2(t) &= S_2(t)(rdt + \sigma_2 dW_2(t)) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind W_1, W_2 stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse und $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$.

Bestimmen Sie den Preis der geometrischen Put-Option, deren Auszahlung gegeben ist durch

$$C = (K - S_1(T)^{\alpha_1} S_2(T)^{\alpha_2})^+$$

mit $\alpha_1, \alpha_2 > 0$.

Bestimmen Sie eine Hedgestrategie.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Gegeben sei ein eindimensionales arbitragefreies, vollständiges Finanzmarktmodell der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu(t) + \sigma(t)dW(t))$$

bezüglich eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$. Sei weiter C ein T-Claim, derart dass $C \geq 0$, $\mathbb{E}C^* < \infty$ und $\mathbb{E}^*(C^*|\mathfrak{F}_t) > 0$ für alle $0 \leq t < T$ gilt. Zeigen Sie, dass $C_t = \beta(t)\mathbb{E}^*(C^*|\mathfrak{F}_t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ die stochastische Differentialgleichung

$$dC(t) = C(t)(r(t)dt + \sigma_C(t)dW^*(t))$$

für einen geeigneten previsiblen Prozess σ_C erfüllt, wobei W^* einen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$ definiert und $r(t)$ die risikolose Zinsrate im Modell bezeichnet.

Welche stochastische Differentialgleichung erfüllt C bezüglich des subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.

Welche Invarianz muss gelten? (Der Finanzmarkt ist ja auch durch den Preisprozess C eindeutig bestimmt.)

Abgabe: Die. 27.05.2014 bis spätestens 12.00 Uhr im Fach 131